This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

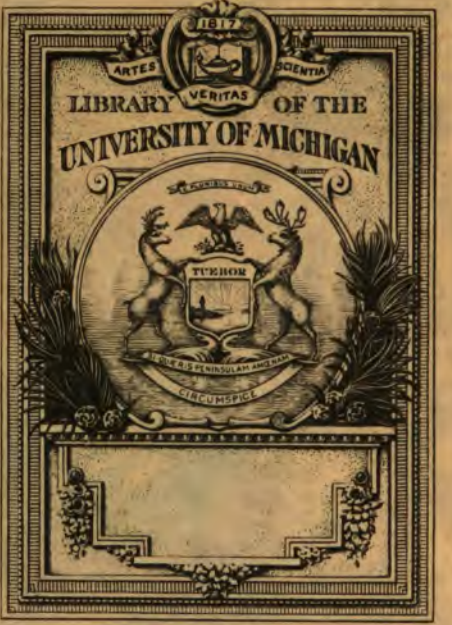
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

De la Librairie des
Freres JACQUENOD,
rue Merciere.
A LYON.



QC
19
L13
P33
1772

LE GUIDE

DES JEUNES

MATHÉMATICIENS.

LE GUIDE

DES JEUNES

MATHÉMATICIENS

OU

Commentaire des Leçons de Mécanique de M. l'Abbé DE LA CAILLE.

Pour ſervir de ſuite au Commentaire de ſes Leçons de Géométrie & d'Algèbre,

Avec un Supplément où l'on diſcute pluſieurs points intéreſſants de la plus haute Mécanique que l'Auteur n'a fait qu'indiquer dans ſon Traité.

Par M. PAULIAN, Prêtre, Aſſocié à l'Académie Royale de Nîmes.

A AVIGNON,

Chez la Veuve GIRARD & FRANÇOIS SEGUIN, Impr. Libraires, près la Place St. Didier.

Se trouve A PARIS,

Chez { DURAND, Libraire, Rue St. Jacques.
De HANSY le jeune, Libraire, Rue St. Jacques, près les Mathurins.

M. DCC. LXXII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

Hist of Science
Blanchard
10-4-39
39203

A MONSEIGNEUR

LE DUC DE LA VAUGUYON, Pair de France, Lieutenant Général des Armées du Roi, Chevalier Commandeur de ſes Ordres, premier Gentilhomme de la Chambre de Monſeigneur le Dauphin & grand Maître de ſa Garde-Robe, Gouverneur de ſa Perſonne, de celle de Monſeigneur le Comte de Provence & de celle de Monſeigneur le Comte d'Artois, premier Gentilhomme de leurs Chambres, grand Maître de leurs Garde-Robes & Surintendant de leurs Maiſons.

a-13-40 Coll.

MONSEIGNEUR,

LA dédicace d'un Ouvrage eſt l'écueil ordinaire des Auteurs. Animés des ſentiments de la plus vive, comme de la plus juſte reconnoiſſance, ils travaillent

d'abord à caractériſer le Héros qui veut bien les honorer de ſa protection : efforts inutiles, tentative téméraire ; l'idée qu'ils en donnent au Public eſt toujours au-deſſous de celle qu'il s'en eſt déja formé lui-même.

Telle eſt la ſituation critique où je me trouverois aujourd'hui, MONSEIGNEUR, *ſi, guidé par mon zele & ma vénération pour vous, je n'avois eu recours qu'à mon foible pinceau, pour ébaucher votre portrait ; le plus célebre de nos Poëtes n'a peut-être pas aſſez loué la plus héroïque de vos vertus guerrieres* (*).

Pour vous peindre d'après nature, il falloit un grand Prince, juſte appréciateur du vrai mérite. S'il s'empreſſa de vous confier ce qu'il avoit de plus cher en ce monde, c'eſt, comme il le diſoit lui-même, *qu'il ne connut perſonne plus en état que vous de donner à ſes auguſtes Enfants une éducation digne de leur haute deſtinée. Auſſi ſa grande conſolation en mourant, étoit de penſer qu'il laiſſoit entre vos mains ce précieux dépôt ſi cher à ſon cœur.*

(*) M. de Voltaire dans ſon Poëme ſur la bataille de Fontenoi, parle ainſi :

D'un rempart de gazon foible & prompte barriere
Que l'art oppoſe à peine à la fureur guerriere,
La Marck, la Vauguyon, Choiſeul d'un même effort,
Arrêtent une Armée & repouſſent la mort.

Mais pourquoi vais-je rouvrir des plaies qui ne ſont pas encore entiérement fermées ? Les larmes dont je ſuis baigné au ſouvenir de la perte que ce Royaume a faite, arrêtent ma plume ; elles me permettent à peine de vous aſſurer qu'il n'eſt que ma reconnoiſſance pour toutes les obligations que je vous ai, qui puiſſe égaler le profond reſpect avec lequel je ſuis,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéiſſant ſerviteur, PAULIAN.

PRÉFACE

Contenant le plan de cet Ouvrage & la maniere de s'en ſervir avec ſuccès.

LOrſqu'en l'année 1765 nous fimes paroître le Commentaire des Leçons d'Algébre & de Géométrie de M. l'Abbé de la Caille, ſous le titre de *Guide des jeunes Mathématiciens*, nous eſpérions pouvoir donner, une année après, le Commentaire de ſes Leçons élémentaires de Mécanique. Mais nous n'avions encore fait que parcourir ce Traité, lorſque nous conçumes cet utile projet. A peine en eumes-nous fait une lecture réfléchie que nous nous convainquimes qu'il nous falloit, pour l'exécuter, non pas une, mais pluſieurs années de l'étude la plus aſſidue. Il y a en effet dans cet Ouvrage, tout digne qu'il eſt de la réputation de ſon Auteur, non-ſeulement des points à éclaircir, & d'autres à corriger, mais encore des omiſſions très-conſidérables qui nous ont fourni la matiere d'un ample ſupplément.

Les points à éclaircir ſont en trop grand nombre, pour en faire ici l'énumération. Nous ne croyons pas qu'il y ait de l'exagération à aſſurer que de 540 articles que contient la Mécanique de M. l'Abbé de la Caille, près de la moitié eſt bien au-deſſus de la portée des commençans abandonnés à eux-mêmes. N'en ſachons pas mauvais gré à l'Auteur. Il en eſt de ſes Leçons de Mécanique, comme de ſes Eléments d'Algébre & de Géométrie; il

n'en conſeilloit la lecture à ſes éleves, que pour leur rappeller en peu de mots ce qu'il leur avoit dit ſur cette matiere dans ſes ſavantes explications.

Les articles à corriger ne ſont gueres qu'au nombre de 14; ce ſont les articles 29, 182, 194, 198, 199, 200, 349, 362, 365, 385, 398, 442, 521 & 532. Nous ſommes perſuadés que les gens du métier y ont apperçu, comme nous, des inexactitudes, j'ai preſque dit des fauſſetés capables d'induire les commençans en erreur.

Pour les omiſſions, elles roulent ſur les mouvements circulaire & elliptique, ſur les loix de l'attraction, ſur les forces d'inertie & de gravité, & ſur pluſieurs autres points de la plus haute Mécanique que M. l'Abbé de la Caille s'eſt contenté d'indiquer. C'eſt dans notre ſupplément que nous les avons traités avec toute l'étendue qu'ils nous ont paru mériter.

La méthode que l'on doit ſuivre pour ſe ſervir utilement de ce Commentaire, ſera préciſément celle que l'on a dû garder en liſant notre *Guide*. Lorſqu'on le conſultera, que ce ne ſoit qu'après avoir fait tout ſon poſſible pour trouver par ſoi-même ce que l'Auteur a cru devoir ſupprimer. Sans cette précaution, nos éclairciſſements ſeroient plutôt nuiſibles, qu'utiles aux jeunes Mathématiciens, qui doivent s'habituer de bonne heure à étudier avec attention, & à exercer beaucoup plus leur jugement, que leur mémoire.

C'eſt encore ſous la forme d'un commerce épiſtolaire que nous allons les préſenter. Les *lettres* ſont ſuppoſées écrites par un jeune homme d'un goût décidé pour les Mathématiques, dont toutes les avances conſiſtent à ſavoir parfaitement les éléments d'Algébre & de Géométrie de M. l'Abbé de la Caille. Pour les *réponſes*, on les ſuppoſe faites par un homme à qui ſon âge donne le droit de prendre le ton de maître, & de donner à ſon éleve les enſeignements néceſſaires pour faire dans les ſciences les plus ſûrs & les plus rapides progrès.

Pluſieurs Savants nous ont fait la grace de nous com-

muniquer leurs remarques critiques ſur notre *Guide des jeunes Mathématiciens*. Il paroît qu'ils auroient ſouhaité que nous euſſions donné avec beaucoup plus d'étendue les regles du calcul intégral. Nous aurions pu leur répondre que, n'écrivant que pour mettre à la portée de tout le monde les Leçons de Mécanique, d'Optique & d'Aſtronomie de M. l'Abbé de la Caille, & cet Auteur n'ayant preſque pas fait uſage de ce calcul, nous n'avons pas dû traiter plus au long une matiere dans laquelle les plus habiles Mathématiciens ſont preſque encore novices.

Comme cependant nous nous ferons toujours un devoir de ſoumettre nos lumieres aux leurs, nous allons mettre à la ſuite de cette Préface un Traité du calcul intégral. S'il n'eſt pas abſolument néceſſaire pour l'intelligence des ouvrages de M. l'Abbé de la Caille, il le ſera du moins pour lire avec fruit pluſieurs grands Mathématiciens de nos jours qui ont employé ce calcul avec beaucoup de ſuccès.

ELÉMENTS

DU CALCUL INTÉGRAL.

LE calcul intégral eſt l'inverſe du calcul différentiel. En effet le calcul différentiel conſiſte à trouver une quantité infiniment petite, laquelle étant priſe un nombre infini de fois, ſoit égale à une quantité finie donnée. Le calcul intégral au contraire conſiſte à trouver la quantité finie à laquelle appartient la différence infiniment petite qu'on vous donne. Dans l'un l'on connoît la ſomme, & l'on cherche la différence infiniment petite; dans l'autre l'on connoît la différence infiniment petite, & l'on cherche la ſomme. Cette ſomme ou cette *intégrale* eſt déſignée dans ce calcul par la lettre S. Ainſi $\int dx$ repréſente la quantité finie dont dx eſt la différence infiniment petite; donc $\int dx = x$; donc $\int dx + \int dy = x + y$.

Il ſuit de-là que dans le calcul intégral, la lettre $\int$ équivaut à ces mots *ſomme de*; parce que *intégrer*, ou *prendre l'intégrale*, c'eſt ſommer tous les accroiſſements infiniment petits que la quantité a dû prendre pour arriver à un état déterminé.

Dans ce même calcul on appelle *fonction* d'une variable quelconque x, une autre quantité dans laquelle la variable x ſe trouve mêlée, de quelque maniere que ce ſoit, avec ou ſans conſtantes. Ainſi x^2, x^3, ax, $\sqrt{a+x}$ &c. ſont autant de *fonctions* de x.

On appelle par-là même *fonction* de deux variables $x y$, une quantité dans laquelle ces deux variables ſe trouvent mêlées, de quelque maniere que ce ſoit, avec ou ſans

constantes. Ainsi $xy - xx$, $\sqrt{axy+byx}$ &c. sont autant de fonctions de xy.

Il y a un très-grand nombre de quantités différentielles qu'on ne peut pas intégrer, les unes, parce qu'en effet elles n'ont pu résulter d'aucune différenciation exacte; comme $x\,dy$, $x\,dy - y\,dx$ &c; les autres, parce qu'on n'a pas encore trouvé de méthode pour les intégrer. Aussi s'en tient-on, pour ces dernieres, à une intégration approchée, comme nous le verrons dans la suite.

Pour donner avec ordre les regles d'un calcul dans lequel les plus habiles algébristes sont presque encore novices, nous parlerons d'abord de l'intégration des différentielles à une seule variable; nous apprendrons ensuite à intégrer les différentielles à plusieurs variables.

DE L'INTÉGRATION

Des différentielles à une seule variable.

La regle fondamentale sur laquelle est fondée l'intégration des différentielles à une seule variable, est la suivante.

REGLE FONDAMENTALE.

Pour avoir l'intégrale d'une différentielle à une seule variable, il faut 1°. élever la quantité variable de la différentielle donnée à une puissance plus grande de l'unité. Il faut 2°. diviser la quantité que l'on veut intégrer, par cet exposant ainsi augmenté de l'unité & par la différentielle de la variable, c'est-à-dire, il faut diviser la quantité que l'on veut intégrer, par ce nouvel exposant multiplié par la différentielle de la variable.

Problême 1. Trouver l'intégrale de $3axx\,dx$?

Résolution. L'intégrale de $3axx\,dx$ ou $3ax^2\,dx$ est $\frac{3ax^{2+1}\,dx}{2+1\,dx} = \frac{3ax^3\,dx}{3\,dx} = ax^3$. En effet la différentielle de ax^3 est $3ax^{3-1}\,dx = 3ax^2\,dx = 3axx\,dx$; donc l'intégrale de $3axx\,dx$ est ax^3; donc la regle

que l'on vient de donner, est infaillible pour trouver l'intégration des différentielles à une seule variable.

Corollaire. Par la même raison x^m est l'intégrale de $mx^{m-1}dx$. En effet l'intégrale de $mx^{m-1}dx$ est $\frac{mx^{m-1+1}dx}{m-1+1dx} = \frac{mx^m dx}{mdx} = x^m$.

Par la même raison encore $\frac{3}{5}ax^{\frac{2}{3}}$ est l'intégrale $ax^{\frac{2}{3}}dx$. En effet l'intégrale de $ax^{\frac{2}{3}}dx$ est $\frac{ax^{\frac{2}{3}+1}dx}{\frac{2}{3}+1dx} = \frac{ax^{\frac{5}{3}}dx}{\frac{5}{3}dx} = \frac{3}{5}ax^{\frac{5}{3}}$.

Par la même raison enfin $\sqrt{x}$ ou $x^{\frac{1}{2}}$ est l'intégrale $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$. En effet l'intégrale de $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ est . . . . . $\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}+1}dx}{-\frac{1}{2}+1dx} = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx}{\frac{1}{2}dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 1x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Avant que de proposer des problêmes plus difficiles, appliquons ces premiers éléments du calcul intégral à une proposition de géométrie ; cherchons, par exemple, par le calcul intégral l'aire du cercle ACBDF, *fig. 11 pl. 7.*

Pour la trouver, 1°. je prens le secteur HCB, 2°. je tire le rayon C*h* infiniment proche du rayon HC, 3°. je nomme C la circonférence AFBD, je nomme *r* le rayon HC = C*h*, je nomme *x* l'arc HB, & *dx* la différence H*h* de la quantité variable BH. Cela fait, voici comment je procéde.

1°. Le secteur HCB a pour différence le secteur infiniment petit HC*h*.

2°. Puisque H*h* est une quantité infiniment petite, on peut la considérer comme une ligne droite, & par conséquent le secteur HC*h* peut passer pour un triangle rectangle en *h*, qui a CH pour base & H*h* pour hauteur.

3°. L'aire du triangle $HCh = CH \times \frac{Hh}{2} = \frac{rdx}{2}$.

4°. *r* est une quantité constante, donc l'intégrale de

$\frac{r\,dx}{2} = \frac{rx}{2} = \frac{r}{2} \times x = \frac{1}{2}$ CH × HB. Mais l'intégrale de $\frac{r\,dx}{2}$ est l'aire du secteur HCB; donc l'aire du secteur HCB $= \frac{1}{2}$ CH × HB; donc on trouve l'aire du secteur BCH, en multipliant l'arc HB par la moitié du rayon CH; donc l'on trouvera l'aire du cercle ACBDF en multipliant la circonférence ABFD par la moitié du rayon CH; donc l'aire de ce cercle $= C \times \frac{r}{2} = \frac{cr}{2}$.

REMARQUE I.

L'Intégration des quantités dont nous allons faire l'énumération, dépend de la regle fondamentale que nous avons donnée. Comme cependant cette connexion ne se présente pas d'abord à l'esprit du commun des commençans, nous allons en faire la matiere des problêmes suivans.

Problême 2. Intégrer la quantité $(a + bxx)^2 \times dx$?

Résolution. 1°. Prenez le quarré de $a + bxx$; vous aurez $aa + 2abxx + b^2x^4$.

2°. Multipliez ce quarré par dx; vous aurez $aa\,dx + 2ab\,x^2\,dx + b^2x^4\,dx$.

3°. Appliquez la regle fondamentale du calcul intégral à chaque terme de ce trinome, & le problême sera résolu. L'intégrale de la quantité donnée est donc $aax + \frac{2}{3}abx^3 + \frac{1}{5}b^2x^5$.

Corollaire. Par la même raison l'intégrale de $gx^2\,dx \times (a + bxx)^2$ sera $\frac{1}{3}aagx^3 + \frac{2}{5}abgx^5 + \frac{1}{7}b^2gx^7$, parce que $gx^2\,dx \times (a + bxx)^2 = aagxx\,dx + 2abgx^4\,dx + b^2gx^6\,dx$.

Problême 3. Intégrer la quantité $2x\,dx \times (a + xx)^p$?

Résolution. $\frac{a + xx^{p+1}}{p+1}$ est l'intégrale demandée. En effet par la regle fondamentale l'intégrale de la quantité donnée est $\frac{2x\,dx \times (a + xx)^{p+1}}{p+1 \times 2x\,dx} = \frac{a + xx^{p+1}}{p+1}$.

Remarquez que $2xdx$ eſt la différentielle exacte de $a+xx$. Remarquez encore que dans la quantité $2xdx\times(a+xx)^p$, l'on a coutume de dire que $a+xx^p$ eſt *ſous le ſigne*, & que $2xdx$ eſt *hors du ſigne*.

Corollaire 1. Lorſqu'on a une grandeur complexe *ſous le ſigne* multipliée par une différentielle *hors du ſigne* qui eſt la différentielle exacte de cette grandeur complexe conſidérée *hors du ſigne*, on en trouve l'intégrale par la regle fondamentale.

Corollaire 2. L'on a le même réſultat, lors même que la différentielle dont on vient de parler, eſt multipliée ou diviſée par une grandeur conſtante. Ainſi l'intégrale de $\frac{1}{2}(a^2dx+2bxdx)\times(a^2x+bx^2)^{\frac{1}{2}}$ ſera

$$\frac{\frac{1}{2}(a^2dx+2bxdx)\times(a^2x+bx^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1\times(a^2dx+2bxdx)} = \ldots\ldots$$

$$\frac{\frac{1}{2}(a^2dx+2bxdx)\times(a^2x+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times(a^2dx+2bxdx)} = \frac{1}{3}(a^2x+bx^2)^{\frac{3}{2}},$$

parce que le quotient de $\frac{1}{2}$ diviſée par $\frac{3}{2}$ eſt $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Par la même raiſon $2a(ax+xx)^{\frac{1}{2}}$ eſt l'intégrale de $\frac{a^2dx+2axdx}{\sqrt{ax+xx}}$. En effet $\frac{a^2dx+2axdx}{\sqrt{ax+xx}} = (a^2dx+2axdx)\times(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$. L'intégrale de cette quantité eſt $\frac{(a^2dx+2axdx)\times(ax+xx)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1\times(adx+2xdx)} = \frac{a\times(ax+xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2a\times(ax+xx)^{\frac{1}{2}}$.

Par la même raiſon encore $\frac{g(a+bx)^{p+1}}{p+1\times b}$ eſt l'intégrale de $gdx(a+bx)^p$; pourquoi? parce que par la regle fondamentale l'intégrale de ce binome eſt . . . $\frac{gdx(a+bx)^{p+1}}{p+1\times bdx} = \frac{g(a+bx)^{p+1}}{p+1\times b}$.

REMARQUE II.

Quoiqu'on ne ſache pas intégrer généralement toute différentielle binome, il ſuit de ce que nous avons dit dans la remarque précédente qu'on ſait intégrer la différentielle $g x^m dx \times (a + b x^n)^p$ dans ces deux cas, 1°. lorſque l'expoſant p eſt un nombre entier poſitif, parce qu'alors on n'a qu'à élever le binome $a + b x^n$ à la puiſſance p, & qu'on n'a qu'à multiplier chaque terme de ce binome ainſi élevé par $g x^m dx$; 2°. lorſque $g x^m dx = g x^{n-1} dx$, parce que, à quelques conſtantes près, la différentielle de $a + b x^n$ ſe trouve dans $g x^{n-1} dx$.

Outre ces deux cas, on ſait encore intégrer toute différentielle binome, dans laquelle l'expoſant de x hors du binome, étant augmenté d'une unité, pourra être diviſé exactement par l'expoſant de x dans le binome, & donnera pour quotient un nombre entier poſitif. Cette intégration ſe fait par le moyen d'une transformation, par laquelle on égale la quantité binome (ſans ſon expoſant total) à une ſeule variable; on cherche enſuite, à l'aide de cette transformation, une nouvelle expreſſion de la différentielle propoſée.

L'on me donne, par exemple, à intégrer $h x^3 dx \times (a + b x^2)^{\frac{4}{5}}$. Je vois d'abord que les deux premiers cas n'ont pas lieu pour ce binome, puiſque 1°. l'expoſant total $\frac{4}{5}$ n'eſt pas un nombre entier, puiſque 2°. $h x^3 dx$ ne contient pas la différentielle de $a + b x^2$. Mais je vois auſſi qu'en ajoutant une unité à l'expoſant 3 de x hors du binome, je le diviſe exactement par l'expoſant 2 de x dans le binome, & que cette diviſion me donne pour quotient un nombre entier poſitif. Je conclus donc que ce binome eſt intégrable; & pour parvenir à cette intégration, je procede en la maniere ſuivante.

1°. Je fais $a + b x^2 = y$; ce qui me donne $x^2 = \frac{y - a}{b}$.

2°. Comme $x^3\,dx$ eſt, à un multiplicateur conſtant près, la différentielle de x^4, & que $\frac{y-a}{b} = x^2$, je conclus que $x^4 = \frac{y-a}{b}^2$, je conclus encore que $4x^3\,dx = 2 \times \frac{y-a}{b}^{2-1} \times \frac{dy}{b}$; donc $4x^3\,dx = 2 \times \frac{y-a}{b} \times \frac{dy}{b}$; donc $x^3\,dx = \frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2} \times \frac{y-a}{b} \times \frac{dy}{b} = \frac{y-a \times dy}{2bb}$.

3°. Subſtituons dans le binome propoſé les nouvelles valeurs de $x^3\,dx$ & de $a + bx^2$, nous aurons $\frac{h(y-a)\,dy}{2bb} \times y^{\frac{4}{5}} = h\,x^3\,dx \times (a + bx^2)^{\frac{4}{5}}$.

4°. $\frac{h(y-a)\,dy}{2bb} \times y^{\frac{4}{5}} = \frac{h\,y^{\frac{4}{5}+1}\,dy}{2bb} - \frac{h\,a\,y^{\frac{4}{5}}\,dy}{2bb}$, c'eſt-à-dire, qu'en intégrant le dernier membre de cette équation par la regle fondamentale, j'intégre par-là même le binome propoſé.

5°. L'intégrale de $\frac{h\,y^{\frac{4}{5}+1}\,dy}{2bb} - \frac{h\,a\,y^{\frac{4}{5}}\,dy}{2bb} = \frac{h\,y^{\frac{4}{5}+2}}{\frac{4}{5}+2\times 2bb} - \frac{h\,a\,y^{\frac{4}{5}+1}}{\frac{4}{5}+1\times 2bb} = \frac{h\,y^{\frac{14}{5}}}{\frac{14}{5}\times 2bb} - \frac{h\,a\,y^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}\times 2bb} = \frac{5h\,y^{\frac{14}{5}}}{28bb} - \frac{5h\,a\,y^{\frac{9}{5}}}{18bb}$, $y = a + bx^2$, donc l'intégrale du binome propoſé ſera $\frac{5h}{28bb}(a + bx^2)^{\frac{14}{5}} - \frac{5ha}{18bb}(a + bx^2)^{\frac{9}{5}}$.

REMARQUE III.

Lorſque les différentielles complexes échapent aux cas que nous venons d'examiner, on les intégre par approximation, c'eſt-à-dire, on convertit en ſuite infinie la quantité propoſée; & comme cette ſuite eſt compoſée d'une infinité de monomes dont la valeur va toujours en diminuant, on trouve la valeur ſuffiſante de l'intégrale, en intégrant par la regle fondamentale les 5 à 6 premiers termes de la ſuite.

Si l'on propoſe, par exemple, d'intégrer le binome $dy\,(1-yy)^{-\frac{1}{2}}$; je vois d'abord qu'il n'eſt pas du nombre des binomes qu'on peut intégrer exactement. Je le réduis donc en ſuite infinie; & pour faire cette réduction, je me ſers de la formule générale par laquelle on éleve un binome quelconque $a \pm b$ à une puiſſance quelconque, poſitive, négative, fractionnaire &c. Cette formule fait $(a \pm b)^m = a^m \pm m\,a^{m-1}b + \frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\,a^{m-2}b^2 \pm \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,a^{m-4}b^4$ &c.

1°. Dans le cas préſent la lettre m de la formule devient $-\frac{1}{2}$, la lettre a devient $= 1$, & la lettre $b = yy$. L'on a donc $(1-yy)^{-\frac{1}{2}} = 1 - myy + \frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\,y^4 - \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,y^6 + \frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,y^8$ &c.

2°. $1 - myy = 1 - \times - \frac{1}{2}y^2 = 1 + \frac{1}{2}y^2$.

3°. $+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\,y^4 = +\frac{-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}}{2}\,y^4 = \frac{3}{4}y^4 = \frac{3}{8}y^4$.

4°. $-\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,y^6 = -\frac{-\frac{15}{8}}{6}\,y^6 = +\frac{15}{48}\,y^6 = \frac{5}{16}\,y^6$.

5°. $+\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,y^8 = +\frac{+\frac{105}{16}}{24}\,y^8 = +\frac{105}{384}\,y^8 = +\frac{35}{128}\,y^8$ &c. Donc $(1-yy)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \frac{5}{16}y^6 + \frac{35}{128}y^8$ &c; donc $dy\,(1-yy)^{-\frac{1}{2}} = dy + \frac{1}{2}y^2\,dy + \frac{3}{8}y^4\,dy + \frac{5}{16}y^6\,dy + \frac{35}{128}y^8\,dy$ &c.

6°. J'intégre, par la regle fondamentale, chaque terme de cette ſuite, & je trouve $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9$ &c. pour valeur ſuffiſante de la quantité finie dont $dy\,(1-yy)^{-\frac{1}{2}}$ eſt la différentielle.

REMARQUE IV.

Comme les conſtantes n'ont point de différence, une intégrale, jointe par le ſigne + ou — avec une conſtante, donne la même différentielle, que donneroit cette intégrale, ſi elle étoit ſans conſtante. Le binome $x \pm a$, & le monome x ont la même différentielle dx. On n'eſt pas donc ſûr, lorſqu'on retrouve l'intégrale d'une différentielle, d'avoir cette intégrale exacte. Il faut ſouvent lui ajouter ou en retrancher une conſtante; & cette conſtante a une valeur que l'état de la queſtion détermine, lorſque l'intégration ſe fait dans la vue de réſoudre quelque problême de géométrie. Si je veux trouver, par exemple, par le calcul intégral la quadrature de l'eſpace parabolique APM, *fig. 48 pl. 3*, compris entre l'ordonnée PM $= y$, l'abſciſſe PA $= x$, & l'arc MA d'une parabole quelconque, voici comment je procéde.

1°. Je tire pm infiniment près de PM; je tire encore MR parallele à Pp, & dans le trapeze infiniment petit du premier ordre $PMpm$, je néglige le triangle infiniment petit du ſecond ordre MR m afin d'avoir le rectangle infiniment petit du premier ordre $PMpR = y\,dx$, parce que PM $= pR = y$, & $Pp = dx$.

2°. Je remarque que le rectangle $PMpR$ eſt la différentielle, ou une partie infiniment petite de l'eſpace parabolique APM; donc quarrer l'eſpace APM, c'eſt intégrer $y\,dx$.

3°. L'équation à la parabole eſt $yy = px$, dont la différence eſt $2y\,dy = p\,dx$, à cauſe de la conſtante p; donc $dx = \frac{2y\,dy}{p}$; donc $y\,dx = \frac{2y^2\,dy}{p}$; donc intégrer $\frac{2y^2\,dy}{p}$, c'eſt par-là même intégrer $y\,dx$.

4°. L'intégrale de $\frac{2y^2\,dy}{p}$ eſt $\frac{2y^{2+1}\,dy}{3p \times dy} = \frac{2y^3}{3p}$. Mais $yy = px$; donc $\frac{2y^3}{3p} = \frac{2pxy}{3p} = \frac{2}{3}xy$; donc l'eſpace parabolique APM ſera égal aux $\frac{2}{3}$ d'un rectangle qui auroit

auroit pour baſe l'ordonnée PM & pour hauteur l'abſciſſe PA.

5°. Dans la ſolution du problême précédent l'origine des x eſt au ſommet A ; auſſi l'eſpace APM devenant o, lorſque l'on fait $x = o$, n'y-a-t'il aucune conſtante à ajouter ou à retrancher, pour que l'intégrale $\frac{2}{3} xy$ donne la quadrature que l'on cherche. Mais ſi l'on prenoit l'origine des x au point F, & que l'on fit FP $= x$, l'intégrale $\frac{2}{3} xy$ donneroit la quadrature de l'eſpace FPCM, parce que le rectangle PMpR eſt réellement la différentielle de cet eſpace ; mais elle ne donneroit pas la quadrature de l'eſpace APM. Pour l'avoir, il faut ajouter à l'intégrale $\frac{2}{3} xy$ une conſtante C dont la valeur ſera l'aire de l'eſpace parabolique AFC. Dans cette hypotheſe l'eſpace FCPM a beau devenir o, c'eſt-à-dire, l'on a beau faire $x = o$, l'eſpace APM ne le devient pas ; donc l'eſpace FCPM eſt égal à l'eſpace APM dont on on aura ôté la valeur de la conſtante C, c'eſt-à-dire, l'eſpace FCPM eſt égal aux $\frac{2}{3}$ d'un rectangle qui auroit pour baſe l'ordonnée PM & pour hauteur la ligne AP, compoſée de la conſtante AF & de l'abſciſſe FP, moins les $\frac{2}{3}$ d'un rectangle qui auroit pour baſe FC, & pour hauteur la conſtante AF.

De tout ceci l'on conclut avec raiſon que, pour connoître la grandeur conſtante qu'il faut ajouter à une intégrale, ou en retrancher, pour avoir la ſolution complete du problême propoſé, il faut ſuppoſer la grandeur changeante x de l'intégrale trouvée $= o$; & ſi l'eſpace que l'on cherche devient o par cette ſuppoſition, c'eſt une marque que l'intégrale eſt complete, & que le problême eſt réſolu. Mais ſi après la ſuppoſition de $x = o$, l'eſpace que l'on cherche ne devient pas o, c'eſt-à-dire, s'il reſte une conſtante dans l'intégrale trouvée, il faut la joindre avec un ſigne contraire à cette intégrale, & elle deviendra par-là l'intégrale complete qu'on cherchoit. Suppoſons que $dx \times (x + a)^{\frac{1}{2}}$ ſoit la différentielle d'un eſpace quarrable.

L'intégrale de cette différentielle est $\frac{dx(x+a)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1\times dx} = \frac{(x+a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}$.

Pour savoir si l'intégrale trouvée est complette, je fais $x = o$; & comme il me reste $+\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$, je conclus que l'espace dont il s'agit, n'est pas $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}$; mais $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$.

DE L'INTEGRATION

Des quantités à plusieurs variables.

Lorsque l'intégration des différentielles à plusieurs variables est possible, on doit se servir de la méthode suivante.

1°. Rassemblez tous les termes affectés de la différentielle d'une même variable, & intégrez-les comme s'il n'y avoit dans la quantité proposée d'autre variable que celle-là, c'est-à-dire, regardez les autres variables comme constantes.

2°. Différentiez l'intégrale trouvée, en faisant varier successivement toutes les variables, & retranchez ce résultat de la différentielle proposée. S'il ne reste rien après la soustraction, l'intégrale trouvée est précisément celle que l'on cherche.

3°. Si après la soustraction il se trouve quelque reste, intégrez ce reste, & ajoutez cette nouvelle intégrale à celle que vous avez d'abord trouvée; vous aurez par cette addition l'intégrale que vous cherchez, supposé que l'intégration exacte de la quantité proposée soit possible.

Problême 1. Intégrer la quantité différentielle $3yx^2dx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$?

Résolution 1°. Rassemblez les deux termes $3yx^2dx + y^5dx$, parce que ce sont les deux seuls affectés de dx.

2°. Intégrez ces deux termes, en regardant y comme

constant ; vous aurez $\frac{3yx^{2+1}dx}{2+1\times dx} + y^5x = yx^3 + y^5x$. Je dis que c'est là l'intégrale complette de la différentielle proposée.

Demonstration. En supposant x & y variables, la différentielle de $yx^3 + y^5x$ est $3yx^2dx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$. Mais c'est-là la différentielle proposée ; donc &c.

Corollaire. On auroit eu le même résultat en rassemblant les deux termes affectés de dy, & en regardant x comme constant. En effet dans cette hypothese l'intégrale de $x^3dy + 5xy^4dy$ est $x^3y + \frac{5xy^{4+1}dy}{4+1\times dy} = x^3y + xy^5 = yx^3 + y^5x$.

Problême 2. Intégrer la quantité différentielle $x^3dy + 3yx^2dx + x^2dz + 2zxdx + xdx + y^2dy$?

Résolution 1°. Rassemblez les trois termes affectés de la différentielle dx ; ce sont $3yx^2dx + 2zxdx + xdx$.

2°. Intégrez ces trois termes en regardant y & z comme constants ; vous aurez $\frac{3yx^{2+1}dx}{2+1\times dx} + \frac{2zx^{1+1}dx}{1+1\times dx} + \ldots \frac{x^{1+1}\cdot dx}{1+1\,dx} = yx^3 + zx^2 + \frac{1}{2}x^2$.

3°. Différentiez l'intégrale trouvée, en faisant varier successivement x, y, z, vous aurez $3yx^2dx + x^3dy + 2zxdx + x^2dz + xdx$.

4°. Otez cette différentielle de la différentielle proposée, il restera y^2dy.

5°. Intégrez y^2dy, vous aurez $\frac{y^{2+1}dy}{2+1\times dy} = \frac{1}{3}y^3$.

6°. Ajoutez cette intégrale à l'intégrale trouvée *num.* 2 ; vous aurez $yx^3 + zx^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3$. Je dis que c'est là l'intégrale complette de la différentielle proposée.

Démonstration. En supposant x, y, z variables, la différentielle de $yx^3 + zx^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3$ est $3yx^2dx +$

$x^3\,dy + 2z\,x\,dx + x^2\,dz + x\,dx + y^2\,dy$. Mais c'eſt-là la différentielle propoſée; donc &c.

Corollaire 1. On a abrégé l'opération en prenant les termes affectés de dx, parce que ce ſont les ſeuls où ſe trouvent les trois variables x, y, z. En effet dans les termes affectés de dy, il n'eſt pas fait mention de z, & dans le terme affecté de dz, il n'eſt pas fait mention de y.

On auroit eu cependant le même réſultat, non ſeulement en commençant par prendre les deux termes affectés de la différentielle dy, mais encore en commençant par prendre le terme affecté de la différentielle dz.

1°. Prenons d'abord les 2 termes affectés de la différentielle dy, ce ſont $x^3\,dy + y^2\,dy$, & intégrons-les en regardant comme variable le ſeul y; nous aurons $x^3\,y + \frac{y^3}{3}$.

2°. Différencions l'intégrale trouvée, en faiſant varier ſucceſſivement y & x, nous aurons $x^3\,dy + 3\,y\,x^2\,dx + y^2\,dy$.

3. Otons cette différentielle de la différentielle propoſée, il reſtera $x^2\,dz + 2z\,x\,dx + x\,dx$.

4°. Prenons maintenant les 2 termes affectés de dx, ce ſont $2z\,x\,dx + x\,dx$, & intégrons-les en regardant le ſeul x comme variable; nous aurons $z\,x^2 + \frac{x^2}{2}$, qui ont pour différentielle $x^2\,dz + 2z\,x\,dx + x\,dx$, en faiſant varier ſucceſſivement x & z.

5°. Ajoutons $z\,x^2 + \frac{x^2}{2}$ à l'intégrale trouvée *num.* 2, nous aurons pour l'intégrale complette $x^3\,y + \frac{1}{3}\,y^3 + z\,x^2 + \frac{1}{2}\,x^2$; c'eſt-à-dire, qu'en commençant par prendre les termes affectés de la différentielle dy, nous avons le même réſultat, qu'en commençant par prendre les termes affectés de la différentielle dx. Il nous reſte maintenant à commencer l'opération en prenant le terme affecté de la différentielle dz; c'eſt $x^2\,dz$.

1°. Intégrons ce terme en regardant le seul z comme variable, nous aurons $x^2 z$.

2°. Différencions cette premiere intégrale, en faisant varier successivement x & z, nous aurons $x^2 dz + 2zx dx$.

3°. Otons cette différentielle de la différentielle proposée, il nous restera $3yx^2 dx + x dx + x^3 dy + y^2 dy$.

4°. Dans ce restant prenons les termes affectés de dx, & intégrons-les en regardant le seul x comme variable, nous aurons $yx^3 + \frac{1}{2}xx$.

5°. Différencions cette seconde intégrale, en faisant varier successivement y & z; nous aurons $x^3 dy + 3yx^2 dx + x dx$.

6°. Otons cette différentielle de la différentielle de *num.* 3, il restera $y^2 dy$.

7°. Intégrons $y^2 dy$, nous aurons $\frac{1}{3}y^3$.

8°. Ajoutons les intégrales trouvée *num.* 1, 4, 7, nous aurons $x^2 z + yx^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3$, c'est-à-dire, que par quelque terme qu'on commence l'opération du problême 2, l'on a toujours le même résultat.

Corollaire 2. En examinant la quantité différentielle qui a fait la matiere du problême 1, j'ai vu qu'on pouvoit former l'équation différentielle suivante $\frac{d(3yx^2)}{dy} + \ldots \frac{d(y^5)}{dy} = \frac{d(x^5)}{dx} + \frac{d(5xy^4)}{dx}$, supposé que dans le premier membre de cette équation on ne fasse varier que y, & que dans le second membre on ne fasse varier que x. En effet l'équation dont il s'agit, devient $\frac{3x^2 dy}{dy} + \frac{5y^4 dy}{dy} = \frac{3x^2 dx}{dx} + \frac{5y^4 dx}{dx}$; elle devient donc $3x^2 + 5y^4 = 3x^2 + 5y^4$; donc la quantité différentielle $3yx^2 dx + y^5 dx + x^3 dy + 5xy^4 dy$ donne non seulement une équation proprement dite, mais encore une équation identique; c'est même cette équation identique que l'on doit regarder comme une marque infaillible d'intégration. Aussi, avant que de tenter d'intégrer une quantité diffé-

rentielle à plusieurs variables, il est bon d'examiner si elle donne une ou plusieurs équations identiques.

Il s'agit maintenant de démontrer que la quantité différentielle $3yx^2dx + y^5dx + x^3dy + 5xy^4dy$ n'est exactement intégrable, que parce que je forme une équation identique en disant $\frac{d(3yx^2)}{dy} + \frac{d(y^5)}{dy} = \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(5xy^4)}{dx}$: voici cette démonstration en peu de mots.

Si la quantité différentielle $3yx^2dx + y^5dx + x^3dy + 5xy^4dy$, composée des deux variables x, y, est exactement intégrable, je dois avoir la même intégrale, soit que je commence à considérer y comme variable, soit que je commence à considérer x. Mais si je forme une équation identique en disant $\frac{d(3yx^2)}{dy} + \frac{d(y^5)}{dy} = \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(5xy^4)}{dx}$, c'est une preuve que j'aurai la même intégrale, soit que dans la quantité différentielle $3yx^2dx + y^5dx + x^3dy + 5xy^4dy$, je commence par faire varier y, soit que je commence par faire varier x. En effet dans le premier membre de l'équation $\frac{d(3yx^2)}{dy} + \frac{d(y^5)}{dy} = \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(5xy^4)}{dx}$, je fais varier y, & dans le second membre de la même équation je fais varier x; donc la quantité différentielle $3yx^2dx + y^5dx + x^3dy + 5xy^4dy$ n'est exactement intégrable, que parce que je forme une équation identique en disant $\frac{d(3yx^2)}{dy} + \frac{d(y^5)}{dy} = \frac{d(x^3)}{dx} + \frac{d(5xy^4)}{dx}$.

Corollaire 3. Des deux quantités différentielles $\frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$ & $xydx + 2xdy$ la premiere est intégrable, & la seconde ne l'est pas. En effet $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$ est une équation identique, puisqu'elle ne dif-

fére pas de celle-ci $\frac{y^2\,dy}{dy} = \frac{y^2\,dx}{dx}$.

Au contraire l'on ne peut pas dire $\frac{d(xy)}{dy} = \frac{d(zx)}{dx}$, parce que l'on ne peut pas dire $\frac{x\,dy}{dy} = \frac{z\,dx}{dx}$.

Intégrons maintenant $\frac{1}{3}\,y^3\,dx + xy^2\,dy$. Pour en venir à bout, je prens $\frac{1}{3}\,y^3\,dx$ que j'intégre, en regardant le seul x comme variable, & j'ai $\frac{1}{3}\,y^3\,x$.

Je différencie enſuite cette intégrale en faiſant varier ſucceſſivement x & y; je trouve $\frac{1}{3}\,y^3\,dx + \frac{3}{3}\,xy^2\,dy = \frac{1}{3}\,y^3\,dx + xy^2\,dy$.

J'ôte enfin la différentielle trouvée de la différentielle donnée: & comme il ne reſte rien, je conclus que $\frac{1}{3}\,y^3\,x$ eſt l'intégrale complette de $\frac{1}{3}\,y^3\,dx + xy^2\,dy$.

J'aurois eu le même réſultat en prenant $xy^2\,dy$, & en regardant le ſeul y comme variable.

Corollaire 4. La quantité différentielle à 3 variables $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ eſt exactement intégrable, parce qu'elle fournit les équations identiques $\frac{d(yz)}{dy} = \frac{d(xz)}{dx} \cdot \frac{d(xz)}{dz} = \frac{d(xy)}{dy} \cdot \frac{d(yz)}{dz} = \frac{d(xy)}{dx}$.

Et d'abord il n'eſt aucune de ces équations qui ne ſoit identique. La premiere $\frac{d(yz)}{dy} = \frac{d(xz)}{dx}$ dans le premier nombre de laquelle on fait varier le ſeul y & dans le ſecond membre de laquelle on fait varier le ſeul x, donne $\frac{z\,dy}{dy} = \frac{z\,dx}{dx}$ & $z = z$.

L'équation $\frac{d(xz)}{dz} = \frac{d(xy)}{dy}$ dans le premier membre de laquelle on fait varier le ſeul z, & dans le ſecond membre de laquelle on fait varier le ſeul y, donne $\frac{x\,dz}{dz} = \frac{x\,dy}{dy}$ & $x = x$.

Enfin l'équation $\frac{d(yz)}{dz} = \frac{d(xy)}{dx}$ dans le premier membre de laquelle on fait varier le ſeul z, & dans le

ſecond membre de laquelle on fait varier le ſeul x, donne $\frac{y\,dz}{dz} = \frac{y\,dx}{dx}$ & $y = y$.

Si je veux maintenant intégrer la quantité $y\,z\,dx + x\,z\,dy + x\,y\,dz$, je prens l'un des trois termes, par exemple, $y\,z\,dx$, & je l'intégre en regardant le ſeul x comme variable, je trouve pour intégrale $y\,z\,x$.

Je différencie enſuite $y\,z\,x$, en conſidérant ſucceſſivement comme variables y, z, x; je trouve $y\,z\,dx + y\,x\,dz + x\,z\,dy$.

Je ſouſtrais enfin la différentielle trouvée de la différentielle donnée; & comme il ne reſte rien, je conclus que $y\,z\,x$ eſt l'intégrale de $y\,z\,dx + x\,z\,dy + x\,y\,dz$.

Corollaire 5. Puiſque la quantité différentielle $x\,dy + y\,dx + z\,dy + y\,dz$ donne les équations identiques $\frac{d(x)}{dx} = \frac{d(y)}{dy}$ & $\frac{d(z)}{dz} = \frac{d(y)}{dy}$, je conclus qu'elle eſt exactement intégrable. Pour faire cette opération, je prens les 2 termes affectés de dy, ce ſont $x\,dy + z\,dy$; & je les intégre en regardant le ſeul y comme variable, j'ai $x\,y + z\,y$.

Je différentie cette intégrale, en regardant ſucceſſivement x, y, z comme variables; & je trouve $x\,dy + y\,dx + z\,dy + y\,dz$.

Je ſouſtrais cette différentielle de la différentielle propoſée; & comme il ne reſte rien, je conclus que $x\,y + z\,y$ eſt l'intégrale de $x\,dy + y\,dx + z\,dy + y\,dz$.

Remarque. Quoique la quantité différentielle $x^3\,dy + 3\,y\,x^2\,dx + x^2\,dz + 2\,z\,x\,dx + x\,dx + y^2\,dy$ ſoit exactement intégrable, puiſque ſon intégration a fait la matiere du problême 2; elle ne donne cependant que deux équations identiques, au lieu de trois qu'elle devroit naturellement donner. Les 2 équations identiques ſont $\frac{d(x^3)}{dx} = \frac{d(3\,y\,x^2)}{dy}$ & $\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(2\,z\,x)}{dz}$. Mais les 2 termes $x\,dx$ & $y^2\,dy$, de quelque maniere qu'on s'y prenne, ne conduiront jamais à une équation identique. Cela vient

sans doute de ce que la quantité différentielle dont il s'agit, ne peut s'intégrer que par deux opérations; & que les quantités différentielles qui donnent des équations identiques, s'intégrent à la premiere opération. Revenez sur les problêmes 1 & 2, & vous sentirez la justesse de cette remarque.

Problême 3. Intégrer la différentielle binome $\overline{dx+dy} \times (x+y)$?

Résolution. 1°. Multipliez $x+y$ par $dx+dy$, vous aurez $x\,dx+x\,dy+y\,dx+y\,dy$.

2°. Prenez les 2 termes affectés de dx, ce sont $x\,dx+y\,dx$.

3°. Intégrez ces deux termes, en regardant le seul x comme variable; vous aurez $\frac{x^2}{2}+yx$.

4°. Différenciez cette intégrale, en regardant successivement x & y comme variables, vous aurez $x\,dx+y\,dx+x\,dy$.

5°. Otez cette différentielle de la différentielle donnée, vous aurez $y\,dy$.

6°. Intégrez $y\,dy$, vous aurez $\frac{y^2}{2}$.

7°. Ajoutez cette intégrale à l'intégrale trouvée *num. 3*, vous aurez $\frac{x^2}{2}+yx+\frac{y^2}{2}$; je dis que c'est-là l'intégrale exacte de la différentielle binome proposée.

Demonstration. En supposant x & y variables, la différentielle de $\frac{x^2}{2}+yx+\frac{y^2}{2}$ est $x\,dx+y\,dx+x\,dy+y\,dy$. Mais c'est-là la différentielle proposée; donc &c.

Il n'est pas nécessaire de faire remarquer ici que la quantité différentielle $x\,dx+x\,dy+y\,dx+y\,dy$ ne donne pas autant d'équations identiques que devroit naturellement en donner une quantité exactement intégrable; cette quantité ne peut pas s'intégrer par une seule opération; nouvelle preuve de la justesse de la remarque que nous avons faite un peu plus haut.

Remarque. Il faut dire des différentielles binomes à

pluſieurs variables ce que nous avons dit des différentielles binomes à une ſeule variable. Puiſque $dx + dy$ eſt la différentielle exacte du binome $x + y$, l'on aura l'intégrale de ce binome en ajoutant une unité à ſon expoſant, & en le diviſant par ſon expoſant ainſi augmenté, & par ſa différentielle. L'intégrale de $\overline{dx+dy} \times (x+y)^1$ eſt donc $\frac{\overline{dx+dy}\times(x+y)^2}{2\times\overline{dx+dy}} = \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + yx + \frac{y^2}{2}$, comme nous l'avons déja trouvé.

Corollaire 1. L'intégrale de $\overline{dx+dy} \times (\sqrt{x+y}) = \overline{dx+dy} \times (x+y)^{\frac{1}{2}}$ eſt $\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}$.

Corollaire 2. L'intégrale de $\overline{2adx+2bdy}\times(ax+by)^{-\frac{1}{2}}$ eſt $\frac{\overline{2adx+2bdy}\times(ax+by)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1\times adx+bdy} = \frac{2\times(ax+by)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ $= 4\times(ax+by)^{\frac{1}{2}}$.

Corollaire 3. L'intégrale de $\frac{xdy+ydx}{2\times xy^{\frac{1}{2}}} = \ldots\ldots$ $\frac{\overline{xdy+ydx}\times(xy)^{-\frac{1}{2}}}{2}$ eſt par-là même $\frac{\overline{xdy+ydx}\times(xy)^{\frac{1}{2}}}{2\times\frac{1}{2}\times\overline{xdy+ydx}}$ $= xy^{\frac{1}{2}}$.

Corollaire 4. En général l'intégrale de $\overline{xdy+ydx} \times (xy)^{\frac{m}{n}}$ eſt $\frac{xdy+ydx\times(xy)^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1\times xdy+ydx} = \frac{(xy)^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}} =$ $\frac{n}{m+n}xy^{\frac{m+n}{n}}$.

Problême 4. Trouver l'intégrale de $\frac{ydx-xdy}{yy}$?

Réſolution. L'intégrale demandée eſt la fraction $\frac{x}{y}$.

Démonſtration. Il eſt démontré dans le calcul différentiel que la différentielle d'une fraction quelconque eſt égale à la différentielle du numérateur multipliée par le dénominateur, moins la différentielle du dénominateur

multipliée par le numérateur, le tout divisé par le quarré du dénominateur. Donc la différentielle de $\frac{x}{y}$ est $\frac{ydx-xdy}{yy}$; donc l'intégrale de $\frac{ydx-xdy}{yy}$ est $\frac{x}{y}$.

Problême 5. Trouver l'intégrale de la différence seconde $dx\,ddx$?

Résolution. L'intégrale de la différence seconde $dx\,ddx$ est $\frac{1}{2}dx^2 = \frac{dx^2}{2}$.

Démonstration. $\frac{dx^2}{2} = \frac{dx \times dx}{2}$. Or il est démontré dans le calcul différentiel que la différentielle de $\frac{dx \times dx}{2} = \frac{dx\,ddx + dx\,ddx}{2} = \frac{2\,dx\,ddx}{2} = dx\,ddx$; donc $\frac{1}{2}dx^2$ est l'intégrale de $dx\,ddx$; ce qui prouve que les différences premieres sont les intégrales des différences secondes.

Corollaire 1. Par la même raison $y\,dy$ est l'intégrale de $dy^2 + y\,ddy$. En effet $y\,dy = y \times dy$. Or la différentielle de $y \times dy = dy \times dy + y\,ddy = dy^2 + y\,ddy$; donc $y\,dy$ est l'intégrale de $dy^2 + y\,ddy$.

Par la même raison encore $y\,dx + x\,dy$ est l'intégrale de $y\,ddx + x\,ddy + 2\,dx\,dy$. En effet différencions $y\,dx + x\,dy$, nous aurons $dy\,dx + y\,ddx + dx\,dy + x\,ddy = y\,ddx + x\,ddy + 2\,dx\,dy$, donc &c.

Remarque. Si l'on eût proposé de trouver l'intégrale de $y\,ddx + x\,ddy + 2\,dx\,dy$, il auroit d'abord fallu prendre $y\,ddx$, & l'intégrer en considérant le seul ddx comme variable; vous auriez trouvé $y\,dx$ pour premiere intégrale.

Il auroit ensuite fallu différentier $y\,dx$, en considérant successivement y & dx comme variables; vous auriez trouvé $dy\,dx + y\,ddx$.

Il auroit enfin fallu soustraire $dy\,dx + y\,ddx$ de $y\,ddx + x\,ddy + 2\,dx\,dy$; il vous auroit resté $x\,ddy + dx\,dy$, & la premiere opération auroit été faite.

Pour la seconde opération, vous auriez pris $x\,d\,d\,y$, dont l'intégrale est $x\,d\,y$, en considérant le seul $d\,d\,y$ comme variable.

Vous auriez ensuite différencié $x\,d\,y$, en considérant successivement x & $d\,y$ comme variables; vous auriez trouvé $d\,x\,d\,y + x\,d\,d\,y$.

Vous auriez enfin soustrait cette différence de celle que vous aviez eu de reste après la premiere opération; & comme vous n'auriez pas eu un troisieme reste, vous auriez conclu que les 2 intégrales trouvées par vos deux opérations, c'est-à-dire $y\,d\,x + x\,d\,y$, étoient l'intégrale complette de $y\,d\,d\,x + x\,d\,d\,y + 2\,d\,x\,d\,y$, c'est-à-dire, que l'on trouve les intégrales des secondes différences à plusieurs variables précisément par la même méthode que l'on intégre les premieres différences à un pareil nombre de variables. Relisez les problêmes précédents & vous sentirez la justesse de cette remarque.

Problême 6. Trouver l'intégrale de $m\,m\,-\,m\,x^{m-2}\,d\,x^2 + m\,x^{m-1}\,d\,d\,x$.

Résolution. L'intégrale de la différence seconde proposée est $m\,x^{m-1}\,d\,x$; c'est-à-dire, que l'on a l'intégrale demandée, en prenant le dernier terme du binome proposé, dans lequel on intégrera le seul $d\,d\,x$.

Démonstration. Il est démontré dans le calcul différentiel que la différence de $m\,x^{m-1}\,d\,x$ est $m\,m\,-\,m\,x^{m-2}\,d\,x^2 + m\,x^{m-1}\,d\,d\,x$; donc $m\,x^{m-1}\,d\,x$ est l'intégrale de la différence proposée.

Corollaire 1. Par la même raison $3\,x^2\,d\,x$ est l'intégrale de $6\,x\,d\,x^2 + 3\,x^2\,d\,d\,x$; ce qui prouve que pour intégrer $6\,x\,d\,x^2 + 3\,x^2\,d\,d\,x$, il suffit de prendre le second terme du binome proposé, & d'intégrer le seul $d\,d\,x$.

Tout ce qu'on pourroit demander ici, ce seroit de prouver que $3\,x^2\,d\,x$ a pour différence $6\,x\,d\,x^2 + 3\,x^2\,d\,d\,x$. La preuve n'en est pas difficile.

$3\,x^2\,d\,x = 3\,x^2 \times d\,x$. Or la différence de $3\,x^2 \times d\,x$ est égale 1°. au produit de $d\,x$ multipliant la différence de $3\,x^2$, 2°. au produit de $3\,x^2$ multipliant la différence de

dx ; donc la différence de $3x^2 \times dx = dx \times 6x^{2-1}dx + 3x^2 ddx = 6x\,dx^2 + 3x^2 ddx$.

Corollaire 2. Par la même raiſon encore $2x\,dx$ eſt l'intégrale de $2\,dx^2 + 2x\,ddx$. Ce qui prouve toujours que pour intégrer $2\,dx^2 + 2x\,ddx$, il ſuffit de prendre le ſecond terme du binome propoſé, & d'intégrer le ſeul ddx.

Que $2x\,dx$ ait pour différentielle $2\,dx^2 + 2x\,ddx$, la choſe eſt de la derniere évidence. En effet $2x\,dx$ a pour différentielle $2\,dx\,dx + 2x\,ddx$; il a donc $2\,dx^2 + 2x\,ddx$.

Problême 7. Trouver l'intégrale de . . . . . $\frac{y^3\,ddx - xyy\,ddy - 2yy\,dy\,dx + 2xy\,dy^2}{y^4}$?

Réſolution. L'intégrale demandée eſt la fraction $\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$, dans laquelle on ſuppoſe toutes les quantités variables.

Démonſtration. Le calcul différentiel apprend que la fraction $\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$ a pour différentielle, en la ſuppoſant toute compoſée de quantités variables, . . . $\frac{yy\,dy\,dx + y^3\,ddx - yy\,dx\,dy - xyy\,ddy - 2yy\,dy\,dx + 2xy\,dy^2}{y^4}$; elle a donc pour différentielle, en ôtant les quantités qui ſe détruiſent, $\frac{y^3\,ddx - xyy\,ddy - 2yy\,dy\,dx + 2xy\,dy^2}{y^4}$; donc la fraction $\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$ eſt l'intégrale de la différentielle propoſée.

Corollaire 1. La fraction $\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$, dans la ſuppoſition que dx ſoit regardé comme conſtant, eſt encore l'intégrale de $\frac{2xy\,dy^2 - 2yy\,dy\,dx - xyy\,ddy}{y^4}$.

Corollaire 2. Si l'on ſuppoſe dy conſtant, la même fraction eſt l'intégrale de $\frac{y^3\,ddx - 2yy\,dy\,dx + 2xy\,dy^2}{y^4}$.

Problême 8. Trouver l'intégrale de $\frac{aadx^2+aaxddx+x^3ddx}{\overline{aa+xx}^{\frac{3}{2}}}$?

Réſolution. L'intégrale demandée eſt $\frac{xdx}{\sqrt{aa+xx}}$.

Démonſtration. On apprend dans le calcul différentiel que la différentielle de $\frac{xdx}{\sqrt{aa+xx}}$ eſt . . . . .

$$\frac{\sqrt{aa+xx}\times(dx^2+xddx)-\frac{x^2dx^2}{\sqrt{aa+xx}}}{aa+xx} = \ldots$$

$$\frac{\frac{aa+xx}{\sqrt{aa+xx}}\times(dx^2+xddx)-x^2dx^2}{aa+xx\times\sqrt{aa+xx}} = \frac{aadx^2+aaxddx+x^3ddx}{\overline{aa+xx}^{\frac{3}{2}}};$$

donc $\frac{xdx}{\sqrt{aa+xx}}$ eſt l'intégrale de la différentielle propoſée.

Fin du Traité Élémentaire ſur le Calcul Intégral.

On nous a encore fait remarquer une faute qui ſe trouve à la page 188 de notre *Guide*. Nous y avançons que la différence de la fraction $\frac{x}{y}$ eſt $\frac{ydx-xdy}{yy}$, & nous le prouvons par le calcul ſuivant :

1. $\frac{x}{y} = t.$
2. $x = ty.$
3. $dx = ydt + tdy.$
4. $ydt = dx - tdy.$
5. $dt = \frac{dx-tdy}{y}.$
6. $dt = \frac{dx}{y} - td.$
7. $dt = \frac{dx}{y} - \frac{xd}{y}.$
8. $dt = \frac{ydx}{yy} - \frac{xdy}{yy}.$
9. $dt = \frac{ydx-xdy}{yy}.$

Dans ce calcul la ſixieme équation eſt fauſſe, parce que dy étant une quantité infiniment ſimple, l'on ne peut pas dire $dy = dx \times y$; c'eſt la remarque du digne Succeſſeur de l'Abbé de la Caille, M. l'Abbé Marie, Profeſſeur de Mathématique au College Mazarin & Cenſeur Royal. Nous allons faire un autre calcul dont nous eſpérons qu'il ſera content.

1. $\frac{x}{y} = t$.
2. $x = ty$.
3. $dx = y\,dt + t\,dy$.
4. $y\,dt = dx - t\,dy$.
5. $dt = \frac{dx}{y} - \frac{t\,dy}{y}$.
6. $dt = \frac{y\,dx}{yy} - \frac{t\,dy}{y}$.
7. $dt = \frac{y\,dx}{yy} - \frac{x\,dy}{yy}$.
8. $dt = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$.

Explication. La premiere équation eſt une pure ſuppoſition qu'il eſt impoſſible de ne pas admettre.

La ſeconde équation ne contient aucune difficulté.

La troiſieme équation eſt fondée ſur ce principe: ſi la grandeur x eſt égale à la grandeur ty, la différence de x ſera égale à la différence de ty.

La quatrieme équation ne différe de la troiſieme, qu'en ce que $t\,dy$ qui étoit dans un membre avec le ſigne $+$ eſt paſſé dans l'autre avec le ſigne $-$.

On a eu la cinquieme équation en diviſant par y les deux membres de la précédente.

Comme $\frac{dx}{y} = \frac{y\,dx}{yy}$, la ſixieme équation eſt évidemment bonne.

Il en eſt de même de la ſeptieme équation, parce que $t = \frac{x}{y}$.

La huitieme équation ne différe en rien de la ſeptieme; donc la différence de la fraction $\frac{x}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$.

AVIS AU LECTEUR.

L'Edition des Leçons de Mécanique de M. l'Abbé de la Caille ſur laquelle ce Commentaire a été fait, eſt celle de 1764, entiérement ſemblable à celle de 1759. C'eſt toujours l'une des deux que nous citons, lorſque nous renvoyons le Lecteur au texte de l'Auteur. Les 5 premieres de nos planches ſont celles-là même du Traité que nous commentons. Nous avons mieux aimé les faire graver une ſeconde fois, que de mettre les démonſtrations dans un livre, & les figures dans un autre. Le Lecteur prendra garde aux fautes ſuivantes.

Fautes à corriger.

Page	25	ligne derniere $\frac{1}{\infty}$ *liſez* $\frac{1}{\infty}$.
page	98	ligne 3 $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$ *liſez* $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}$.
page	136	ligne 10 mériter ce titre *liſez* mériter ce nom.
page	188	ligne 32 illarum planetarum *liſez* illorum.
page	190	ligne 9 vix *liſez* vis.
page	212	ligne 29 radiorum *liſez* radiorum circulorum.
page	219	ligne 29 lineæ *liſez* linea.

COMMENTAIRE

COMMENTAIRE
DES LEÇONS ÉLÉMENTAIRES
DE MÉCANIQUE
DE M. L'ABBÉ DE LA CAILLE.

LIVRE PREMIER.

INTRODUCTION.

LE premier Livre du Commentaire que nous donnons au Public, eſt compoſé de vingt *lettres* & d'autant de *réponſes*. La premiere lettre & la premiere réponſe roulent ſur ce que M. l'Abbé de la Caille appelle *Notions préliminaires*. Les trois lettres & les trois réponſes ſuivantes ſont ſur le mouvement rectiligne, qui fait l'objet de la premiere partie du Traité que nous avons entrepris de commenter. La ſeconde partie de ce même Traité eſt ſur le choc des corps mus en ligne droite, & ſur la rencontre & l'oppoſition des Forces. Les éclairciſſements que nous avons cru devoir y ajouter, nous ont fourni la matiere de douze lettres & de douze réponſes. Enfin les quatre dernieres lettres, ainſi que les ré-

ponſes qui leur ſont analogues, forment le Commentaire de la troiſieme partie, ou de la théorie des mouvements en ligne courbe. Nous répéterons ici avec confiance ce que nous dimes au commencement de l'Ouvrage dont celui-ci n'eſt que la continuation : le deſir ſincere que nous avons de compoſer d'une maniere qui puiſſe être utile au Public, nous donne une eſpece de droit à ſon indulgence.

LETTRE PREMIERE.

Néceſſité d'un Commentaire pour les articles 20, 29 & 34.

JE n'ai pu entreprendre que depuis quelques jours, M., la lecture de la Mécanique de M. l'Abbé de la Caille à laquelle vous m'avez conſeillé de m'adonner inceſſamment. Je ſuis aſſuré de faire dans cette ſcience les plus rapides progrès, ſi vous voulez bien continuer à me ſervir de guide. Des 41 articles qui forment les notions préliminaires de cette Mécanique, je n'en connois que 3 qui puiſſent arrêter un homme qui a étudié les Élémens de Mathématiques auxquels notre Auteur a ſoin de renvoyer de tems en tems; ce ſont les articles 20, 29 & 34. M. l'Abbé de la Caille nous aſſure dans le premier que *ſi deux effets* E, e *ſont produits chacun par deux cauſes hétérogenes* P & Q, p & q; *qui, en augmentant, contribuent à diminuer chaque effet, l'on aura la proportion ſuivante* E : e :: p q : P Q, *c'eſt-à-dire, les deux effets ſeront en raiſon compoſée inverſe de leurs cauſes.* Je ſerois charmé d'en avoir la démonſtration, & de n'être pas obligé de l'en croire ſur ſa parole. Il en eſt de même de l'article 34, où il avertit que *dans l'équation* $D = \frac{M}{S}$, *l'on a une formule par le moyen de laquelle on peut déterminer tous les rapports poſſibles entre les denſités, les maſſes & les volumes des corps.* Un tel calcul me paroît bien intéreſſant, & je me crois hors d'état de le trouver. Enfin l'article 29, pris généralement, contient plutôt une fauſſeté, qu'un Axiome. En effet un cheval qui tire une pierre par le moyen d'une corde, paroît avoir une *action* plus grande, que la *réaction* de la pierre, puiſque celle-ci cede à celle-là; donc la *réaction n'eſt pas toujours égale à l'action.* Ce n'eſt même que dans le cas d'équilibre que cette propoſition doit être regardée comme

un *Axiome*. Voilà des difficultés qui me paroiſſent mériter des éclairciſſements. Je les attens avec impatience ; & je vous prie de me croire &c.

RÉPONSE.

Contenant les éclairciſſemens néceſſaires pour l'intelligence des articles 20, 29 & 34.

LA lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, m'a fait un plaiſir infini, M., parce que vous en êtes d'abord venu au fait, ſans aucune eſpece de préambule, ou de compliments. Je vais, à votre exemple, entrer tout de ſuite en matiere, en vous avouant que l'article 20 a grand beſoin d'une démonſtration. Pour y ſuppléer, ſuppoſons un troiſieme effet ε produit par les deux cauſes P & q, qui, en augmentant, contribuent à le diminuer ; & comparons d'abord cet effet ε avec l'effet E produit par les cauſes P & Q.

1°. Puiſque P repréſente une cauſe commune aux deux effets E & ε, l'on peut ne pas en faire mention dans le calcul, & dire, puiſqu'il s'agit de *raiſon inverſe*, $E : \varepsilon :: \frac{1}{Q} : \frac{1}{q}$ (élém. 299) ; donc $\frac{\varepsilon}{Q} = \frac{E}{q}$; donc $\varepsilon q = EQ$; donc $\varepsilon = \frac{EQ}{q}$.

2°. Comparons enſuite l'effet ε produit par les cauſes P & q, avec l'effet e produit par les cauſes p & q. Puiſque q repréſente une cauſe commune à ces deux effets, l'on n'en fera pas mention dans le calcul, & l'on dira (élém. 299) $\varepsilon : e :: \frac{1}{p} : \frac{1}{P}$; donc $\frac{\varepsilon}{P} = \frac{e}{p}$; donc $\varepsilon P = ep$; donc $\varepsilon = \frac{ep}{P}$.

3°. $\varepsilon = \frac{EQ}{q}$, *num.* 1. Item $\varepsilon = \frac{ep}{P}$, *num.* 2 ; donc $\frac{EQ}{q} = \frac{ep}{P}$; donc $EPQ = epq$; donc, en décompoſant cette

équation, l'on trouvera $E : e :: pq : PQ$; donc l'Abbé de la Caille a eu raison d'avancer, à l'article 20, que si deux effets E, e sont produits par deux causes hétérogenes P & Q, p & q, qui, en augmentant, contribuent à diminuer leur effet; l'on aura la proportion suivante $E : e :: pq : PQ$, c'eſt-à-dire, les effets ſeront en raiſon compoſée inverſe de leurs cauſes; & voilà ma réponſe à la premiere queſtion que vous m'avez faite. Il ne me ſera pas ſi aiſé de répondre à votre ſeconde queſtion. Pour le faire avec toute l'étendue que vous ſouhaitez, je ſuppoſe les corps A & a. Je nomme D ſa denſité du premier, M ſa maſſe, S ſon volume; la denſité du ſecond ſera donc d, m ſa maſſe, s ſon volume. Je prens enſuite les deux équations $D = \frac{M}{S}$, $d = \frac{m}{s}$; & pour en tirer tout le parti poſſible par rapport aux denſités, aux maſſes & aux volumes de ces corps, j'en forme la proportion ſuivante $D : d :: \frac{M}{S} : \frac{m}{s}$; donc $\frac{Dm}{s} = \frac{dM}{S}$; donc $DmS = dMs$. Cela ſuppoſé, voici comment je raiſonne.

$DmS = dMs$; donc ſi l'on ſuppoſe $S = s$, l'on aura $Dm = dM$. Mais ſi cette derniere équation eſt vraie, l'on aura, en la décompoſant, $D : d :: M : m$; donc deux corps qui ont même volume, ont leurs denſités comme leurs maſſes, ou leur quantité de matiere propre.

$DmS = dMs$; donc ſi l'on ſuppoſe $M = m$, l'on aura $DS = ds$. Mais ſi $DS = ds$, l'on aura, par la décompoſition, $D : d :: s : S$; donc deux corps qui ont même maſſe, ont leurs denſités en raiſon inverſe de leurs volumes.

$DmS = dMs$; donc ſi $D = d$, l'on aura $mS = Ms$, ou $M : m :: S : s$; donc deux corps qui ont la même denſité, ont leurs maſſes en raiſon directe de leurs volumes.

$DmS = dMs$; donc $S : s :: dM : Dm$; mais $dM : Dm :: \frac{dM}{Dd} : \frac{Dm}{Dd}$, parce que ſi l'on diviſe deux grandeurs par une troiſieme, les dividendes ſont entr'eux comme les quotiens, ſi l'on diviſe, par exemple, 4 & 20 par 10, l'on

pourra dire $40 : 20 :: \frac{40}{10} : \frac{20}{10}$; donc $dM : Dm :: \frac{dM}{Dd} : \frac{Dm}{Dd}$. Mais $\frac{dM}{Dd} : \frac{Dm}{Dd} :: \frac{M}{D} : \frac{m}{d}$; donc $dM : Dm :: \frac{M}{D} : \frac{m}{d}$. Mais $dM : Dm :: S : s$; donc $S : s :: \frac{M}{D} : \frac{m}{d}$; donc les volumes de deux corps quelconques ſont entr'eux, comme leurs maſſes diviſées par leurs denſités; donc il eſt vrai qu'en maniant ſuivant les regles ordinaires non pas la ſeule équation $D = \frac{M}{S}$, mais les deux équations $D = \frac{M}{S}$ & $d = \frac{m}{s}$, l'on trouvera facilement tous les rapports des denſités, des maſſes & des volumes.

Il me reſte, M., à vous parler de l'objection que vous avez faite contre l'article 29, dans lequel M. l'Abbé de la Caille aſſure que la *Réaction eſt toujours égale à l'Action*. Votre objection eſt inſoluble, & la Propoſition de Newton ne paſſera pour un axiome, que lorſqu'on dira que la *Réaction eſt égale à l'Action détruite*. Un cheval, *par exemple*, qui a 200 de force, tire une pierre qui a 100 de réſiſtance; mais comment la tire-t-il? avec 100 de force ſeulement; donc l'*Action détruite* eſt 100. Mais la *Réaction* de la pierre eſt 100; donc la *Réaction eſt toujours égale à l'Action détruite*. Voyez cette matiere traitée plus au long dans notre Traité de paix entre *Deſcartes & Newton*, *tom. 2. pag. 260 & ſuiv.* J'ai l'honneur d'être &c.

LETTRE SECONDE.

Remarques ſur les trois premiers corollaires du théorême de l'article 44. Néceſſité d'un commentaire pour le corollaire 4 du même théorême.

CE que vous m'avez écrit, M., ſur la denſité des corps, a été pour moi une eſpece de formule par le moyen de laquelle j'ai compris ſans peine que *les vi-*

teſſes ſont en tems égaux comme les eſpaces parcourus pendant ces tems, & que *les vîteſſes employées à parcourir des eſpaces égaux, ſont réciproquement comme les tems.* Ce ſont là, vous le ſavez, les deux premiers corollaires que tire l'Abbé de la Caille du théorême 1 du chapitre où il traite du mouvement rectiligne réel, ſimple & uniforme. Suppoſons en effet les deux corps A & *a*. Nommons la vîteſſe du premier V, l'eſpace qu'il parcourt E, le tems qu'il emploie à le parcourir T; nous nommerons par-là même *u*, *e*, *t* la vîteſſe, l'eſpace & le tems qui ont rapport au corps *a*. Cela fait, prenons les deux équations $V = \frac{E}{T}$, $u = \frac{e}{t}$; nous aurons la proportion ſuivante $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; donc $\frac{Ve}{t} = \frac{uE}{T}$; donc $VeT = uEt$. Cela ſuppoſé, voici comment j'ai raiſonné.

$VeT = uEt$; donc ſi $T = t$, l'on aura $Ve = uE$; ou, ce qui revient au même $V : u :: E : e$; donc deux corps qui parcourent en tems égaux des eſpaces inégaux, ont leurs vîteſſes comme les eſpaces parcourus.

$VeT = uEt$; donc ſi $e = E$, l'on aura $VT = ut$, ou, $V : u :: t : T$; donc deux corps qui parcourent en tems inégaux des eſpaces égaux, ont leurs vîteſſes en raiſon inverſe des tems.

Le corollaire 3e. ſe comprend à la premiere lecture. Il n'en eſt pas ainſi du quatrieme; j'ai beſoin de votre ſecours pour le comprendre. Cette difficulté m'a empêché de paſſer au théorême ſecond. Je vous prie de m'envoyer le commentaire de ce corollaire, & d'y ajouter les éclairciſſements des points qui pourroient m'arrêter encore dans la lecture de ce chapitre. Vous obligerez celui qui ſera toute ſa vie avec la reconnoiſſance la plus parfaite &c.

RÉPONSE.

Contenant des éclaircissemens pour le corollaire 4 de l'article 44, & pour les articles 52, 53, 58, 60 & 62.

VOus voulez donc que je vous démontre, M., que *les vîtesses de deux corps qui parcourent des espaces qui sont entr'eux réciproquement comme les tems, sont entr'elles, ou directement comme les quarrés de ces espaces, ou réciproquement comme les quarrés des tems.* Pour en venir à bout, je me sers pour les vîtesses, les espaces & les tems qui ont rapport aux corps A & *a*, des mêmes lettres dont vous vous êtes servi vous-même. Voici donc comment je procéde.

1°. *Par hypothese*, les tems sont en raison inverse des espaces; donc $T : t :: \frac{1}{E} : \frac{1}{e}$; donc je pourrai substituer $\frac{1}{E}$ & $\frac{1}{e}$ à T & *t*.

2°. $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; donc V : *u* :: E divisé par $\frac{1}{E}$: *e* divisé par $\frac{1}{e}$. Mais E divisé par $\frac{1}{E} = \frac{EE}{1} = EE$; de même *e* divisé par $\frac{1}{e} = \frac{ee}{1} = ee$; donc $V : u :: EE : ee$; donc les vîtesses de deux corps qui parcourent des espaces qui sont entr'eux réciproquement comme les tems, sont entr'elles directement comme les quarrés de ces espaces. Elles sont encore entr'elles réciproquement comme les quarrés des tems.

3°. *Par hypothese*, les espaces sont en raison inverse des tems; donc $E : e :: \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$; donc je pourrai substituer $\frac{1}{T}$ & $\frac{1}{t}$ à E & *e*.

4°. $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; donc, en faisant la substitution

dont je viens de parler, j'aurai $V : u :: \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$; donc les vîteſſes de deux corps qui parcourent des eſpaces qui ſont entr'eux réciproquement comme les tems, ſont entr'elles réciproquement comme les quarrés des tems. Voilà, M., ma réponſe au premier article de votre lettre. Pour répondre au ſecond d'une maniere qui vous ſatisfaſſe, je vous envoie le commentaire des articles 52, 53, 58, 60 & 62 ; ce ſont les ſeuls qui ſoient capables de vous arrêter dans l'étude de la Mécanique.

Pour ſaiſir l'article 52, il faut ſe rappeller que ſi $V = \frac{E}{T}$, & $u = \frac{e}{t}$; donc $E = VT$, & $e = ut$; donc $E : e :: VT : ut$; donc les eſpaces parcourus ſont en raiſon compoſée des vîteſſes & des tems. ſuppoſons maintenant des eſpaces parcourus en des tems proportionnels aux vîteſſes, c'eſt-à-dire, ſuppoſons que $V : u :: T : t$; je pourrai ſubſtituer la raiſon de V à u à celle de T à t ; donc ſi $E : e :: VT : ut$, l'on aura *par ſubſtitution* $E : e :: VV : uu$. Je ſubſtituerai de même la raiſon de T à t à celle de V à u ; donc ſi $E : e :: VT : ut$, l'on aura $E : e :: TT : tt$; donc les eſpaces parcourus en des tems proportionnels aux vîteſſes, ſont entr'eux comme les quarrés des vîteſſes, ou comme les quarrés des tems.

$E : e :: VT : ut$; donc en ſuppoſant $T : t :: \frac{1}{V} : \frac{1}{u}$, l'on aura $E : e :: \frac{V}{V} : \frac{u}{u}$, ou $:: 1 : 1$; les eſpaces parcourus en des tems réciproquement proportionnels aux vîteſſes, ſont égaux entr'eux, & c'eſt-là le commentaire de l'*article 53*.

$V = \frac{E}{T}$ & $u = \frac{e}{t}$; donc $VT = E$ & $ut = e$; donc $T = \frac{E}{V}$ & $t = \frac{e}{u}$; donc $T : t :: \frac{E}{V} : \frac{e}{u}$. Suppoſons maintenant que $E : e :: \frac{1}{V} : \frac{1}{u}$, c'eſt-à-dire, ſuppoſons que les eſpaces parcourus ſont en raiſon inverſe des vîteſſes, l'on

ſubſtituera la raiſon de $\frac{1}{V}$ à $\frac{1}{u}$ à celle de E à e, & l'on dira $T : t :: \frac{1}{VV} : \frac{1}{uu}$; donc les tems employés à parcourir des eſpaces qui ſont en raiſon inverſe des vîteſſes, ſont réciproquement comme les quarrés des vîteſſes. Ils ſont encore directement comme les quarrés des eſpaces. En effet ſuppoſons que $V : u :: \frac{1}{E} : \frac{1}{e}$, c'eſt-à-dire, ſuppoſons les vîteſſes en raiſon inverſe des eſpaces parcourus, l'on aura, au lieu de la proportion $T : t :: \frac{E}{V} : \frac{e}{u}$, l'on aura, *dis-je*, $T : t :: E$ diviſé par $\frac{1}{E} : e$ diviſé par $\frac{1}{e}$. Mais E diviſé par $\frac{1}{E} = \frac{EE}{1} = EE$, de même e diviſé par $\frac{1}{e} = \frac{ee}{1} = ee$; donc l'on aura $T : t :: EE : ee$; donc les tems employés à parcourir des eſpaces qui ſont en raiſon inverſe des vîteſſes, ſont directement comme les quarrés des eſpaces parcourus; donc l'*article* 58 contient une vérité inconteſtable.

Pour commenter l'article 60, je nomme F la force du corps A, M ſa maſſe, V ſa vîteſſe; je nomme auſſi f la force du corps a, m ſa maſſe, u ſa vîteſſe. J'ai donc $F = MV$, & $f = mu$; j'ai encore $F : f :: MV : mu$; j'ai enfin $Fmu = fMV$. C'eſt de cette équation que je tire les vérités ſuivantes.

$Fmu = fMV$; donc ſi $F = f$, l'on aura $MV = mu$, ou $M : m :: u : V$; donc deux corps qui ont même force, ont leurs maſſes en raiſon inverſe de leurs vîteſſes.

$Fmu = fMV$; donc ſi $m = M$, l'on aura $Fu = fV$, ou $F : f :: V : u$; donc deux corps qui ont même maſſe, ont leurs forces en raiſon directe de leurs vîteſſes.

$Fmu = fMV$; donc ſi $V = u$, l'on aura $Fm = fM$, ou $F : f :: M : m$; donc deux corps qui ont même vîteſſe, ont leurs forces en raiſon directe de leurs maſſes.

L'article 62 eſt ſans contredit le plus difficile de tous;

je suis sûr cependant que ce sera celui qui vous embarrassera le moins ; je sais que vous avez lu ce que dit M. l'Abbé de la Caille sur le calcul différentiel & intégral, à la fin de ses Élémens de Mathématiques. Rappellez-vous donc qu'un espace quelconque fini e est composé d'un nombre infini d'espaces infiniment petits ; donc $e = sde$; donc si $t = \frac{e}{u}$, l'on aura $t = \frac{sde}{u} = s\frac{de}{u}$. De même un tems quelconque fini t est composé d'une infinité de tems infiniment petits ; donc $t = sdt$; donc si $e = tu$, l'on aura $e = sdtu$. Ce sont là, M., les seules choses qui peuvent arrêter un commençant dans la lecture du chapitre où l'Abbé de la Caille traite du mouvement rectiligne réel, simple & uniforme. Vous pourrez passer ensuite au mouvement composé, absolu & uniforme ; c'est un des beaux morceaux du Traité de Mécanique que vous avez entre les mains. J'ai l'honneur d'être &c.

LETTRE TROISIEME.

Contenant des remarques sur les articles 68, 79, 84 & 96.

LE chapitre du mouvement composé, absolu & uniforme est en effet, Mr, un des beaux morceaux de la Mécanique de l'Abbé de la Caille. Il n'a besoin d'aucun éclaircissement ; & si j'en fais la matiere de cette lettre, ce n'est que pour vous communiquer quelques remarques que j'ai faites, en le lisant. Entrons en matiere ; je sais que vous n'aimez pas les préambules inutiles.

La démonstration de l'article 68 n'a presque fait aucune impression sur mon esprit. J'aimerois mieux, d'après Privat de Molieres, la présenter à peu près en ces termes, en me servant cependant de la figure de la Caille, c'est la figure 1 de la planche 1. Concevez

que le Mobile en repos au point C, ne ſe meuve d'abord que par l'action de la ſeule force *p*, dont la direction eſt *p*CA, & qu'il y parcoure CA durant le tems T; qu'enſuite ceſſant de ſe mouvoir en ce ſens, & étant en repos au point A, il ſe meuve par l'action de la ſeule force P dans la direction CD devenue AB, parce que les lignes CD & AB ſont paralleles; il eſt clair que dans un pareil tems T le Mobile parcourroit dans ce cas la ligne AB égale à la ligne CD, & que par conſéquent le Mobile par l'action disjointe des deux forces *p*, P arriveroit au point B. Or deux forces *p*, P agiſſant conjointement ſur un Mobile, y doivent produire le même effet qu'elles y produiroient en agiſſant ſéparément & de la même façon, chacune durant le même tems. Donc l'action conjointe *p*, P doit tranſporter le Mobile du point C au point B, & lui faire parcourir la diagonale CB durant le tems T que la ſeule force P l'auroit tranſporté de C en D, ou que la ſeule force *p* l'auroit tranſporté de C en A.

Le Géometre délicat, *continuë Privat de Molieres*, ſera ſans doute ſurpris de ne pas ſe ſentir frappé, dans la démonſtration de cette propoſition, de la même conviction dont on ſe ſent frappé dans les démonſtrations des propoſitions géométriques: mais il n'y a pas tant lieu de s'en étonner. Les Principes d'où les propoſitions géométriques dependent ſont des Principes *néceſſaires*; au lieu que le Principe d'où celle-ci dépend n'eſt qu'un Principe de *convenance* fondé ſur l'idée de la plus grande ſimplicité, & ſur un nombre prodigieux d'expériences. D'où il ſuit que ſi ce Principe n'eſt pas métaphyſiquement évident, il eſt au moins phyſiquement certain & par conſéquent indubitable.

Cette derniere remarque de Privat de Molieres doit nous faire regarder comme bonne la démonſtration qu'a donné l'Abbé de la Caille, à l'article 68. En tout cas s'il eût pu en cette occaſion en donner une un peu mieux travaillée, il a bien réparé ſa faute, à l'article

84 qui roule à-peu-près ſur la même matiere ; tout ce qu'il dit dans cet article, & dans les 4 à 5 ſuivants eſt nouveau & d'un goût exquis.

Pour l'article 79, il m'a paru très difficile à la premiere lecture ; mais les difficultés ont diſparu, lorſque je me ſuis rappellé la fameuſe propoſition de la Trigonométrie rectiligne qui dit que *dans tout triangle rectiligne ſcalene la ſomme des deux côtés quelconques eſt à leur différence, comme la tangente de la demi-ſomme des deux angles oppoſés à ces côtés eſt à la tangente de la demi-différence de ces deux angles.* Cela ſuppoſé, j'ai examiné le triangle ſcalene CDB de la figure 5 de la planche 1, dans lequel on connoît le côté CD = 10, le côté DB = 13, & l'angle obtus CDB de 124 degrés. Pour trouver l'angle aigu BCD, j'ai opéré de la ſorte.

23, *ſomme des deux côtés* CD & DB : à 3, *différence de ces mêmes côtés* : : la tangente de 28 degrés, *demi-ſomme des angles* BCD & CBD : à la tangente de la demi-différence de ces deux angles ; ou bien

1,3617278, *logarithme de* 23, eſt à 0,4771212, *logarithme de* 3 : comme 9,7256744, *logarithme de la tangente de* 28 *degrés*, eſt à 8,8410678, *logarithme* de la tangente de 3 degrés, 58 minutes ; donc la demi-différence des angles BCD & CBD eſt de 3 degrés 58 minutes ; donc ajoutée à leur demi-ſomme, 28 degrés, elle donnera l'angle BCD ; donc ſouſtraite de 28 degrés, elle donnera l'angle CBD : donc l'angle BCD eſt de 31 degrés 58 minutes, & l'angle CBD eſt de 24 degrés 2 minutes. Cela fait, j'ai connu la baſe CB du triangle CDB par les opérations ſuivantes.

9,7238051, *logarithme du ſinus de l'angle* BCD, eſt à 1,1139433, *logarithme du côté* DB : comme 9,9185742, *logarithme du ſinus de l'angle* CDB, eſt à 1,3087124, *logarithme de* 20, 36 ; donc la valeur de la baſe CB eſt 20, 36. Ces opérations une fois faites, j'ai ſuivi ſans peine l'Abbé de la Caille, non ſeulement le reſte de l'article 79, mais encore le reſte

du chapitre ſur le mouvement compoſé, abſolu & uniforme. Le chapitre ſuivant m'a paru beaucoup plus difficile. Je vous prie de m'en envoyer le commentaire, en commençant à l'article 96. J'ai l'honneur d'être &c.

RÉPONSE.

Contenant des remarques ſur les articles 96, 97, 98, 99, 113 & 116.

VOus avez raiſon, M., le chapitre de la Mécanique où l'Abbé de la Caille parle du mouvement rectiligne uniformément accéléré, ou de la chûte libre des corps & de leurs mouvements ſur des plans inclinés, a beſoin d'un très grand commentaire. Je le commencerai à l'article que vous avez déſigné vous-même, c'eſt-à-dire, à l'article 96 de la démonſtration duquel vous n'avez pas été apparemment content. Peut-être aimerez-vous mieux la démonſtration que l'on donne de ce théorême dans tous les élémens de Statique; je vais vous la préſenter avec toute la clarté dont je ſerai capable; elle eſt un peu moins difficile que celle de l'Abbé de la Caille, mais cependant elle ne lui eſt pas préférable. Venons au fait.

Il s'agit de démontrer que dans le mouvement uniformément accéléré, l'eſpace e parcouru pendant un certain tems fini t, compté depuis le commencement du mouvement, n'eſt que la moitié de l'eſpace que parcourroit uniformément dans le même tems t, un corps qui auroit acquis une vîteſſe u égale à celle qui ſe trouve acquiſe par l'accélération, à la fin du tems t.

Explication. Je ſuppoſe que le corps B, *Fig.* 1 *Pl.* 6, ſe meuve pendant 5 inſtants égaux d'un mouvement uniformément accéléré, de telle ſorte qu'à la fin du premier inſtant repréſenté par BE, il ait une vîteſſe exprimée par En; à la fin du ſecond inſtant repréſenté par EF, il ait une vîteſſe exprimée par Fo; à la fin du troiſieme inſtant repréſenté par FG, il ait une vîteſſe

exprimée par Gp ; à la fin du quatrieme inſtant repréſenté par GH, il ait une vîteſſe exprimée par Hq ; à la fin du cinquieme inſtant repréſenté par HA, il ait une vîteſſe exprimée par AC ; je dis que ſi le corps B avoit eu au commencement de ſon mouvement une vîteſſe repréſentée par AC, & qu'il l'eût conſervée pendant tout le tems qu'il s'eſt mû, ſans augmentation ou diminution quelconque, c'eſt-à-dire, ſi le corps B avoit eu au commencement du premier inſtant une vîteſſe repréſentée par BD, au commencement du ſecond une vîteſſe repréſentée par EI, au commencement du troiſieme une vîteſſe repréſentée par FK, au commencement du quatrieme une vîteſſe repréſentée par GL, & au commencement du cinquieme une vîteſſe repréſentée par HM, je dis que le corps B auroit parcouru un eſpace double de celui qu'il a parcouru.

Démonſtration. Dans le premier *cas* d'un mouvement uniformément accéléré, le corps B auroit parcouru l'aire du triangle BAC ; dans le ſecond *cas* d'un mouvement conſtant & uniforme, il auroit parcouru l'aire du quadrilatere ABCD, double de l'aire du triangle BAC ; donc ſi le corps B avoit eu au commencement de ſon mouvement une vîteſſe égale à celle qu'il a eue à la fin, & s'il l'avoit conſervée pendant tout le tems de ſon mouvement ſans augmentation ni diminution, il auroit parcouru un eſpace double de celui qu'il a parcouru.

L'Abbé de la Caille a donc eu raiſon d'avancer que puiſque dans le mouvement conſtant & uniforme la formule de l'eſpace parcouru eſt $e = ut$, elle ſera dans le mouvement uniformément accéléré $e = \frac{ut}{2}$. Il y a donc dans un corps qui tombe une *vîteſſe acquiſe* & une *vîteſſe qui s'acquiert.* Un degré de *vîteſſe acquiſe* fait parcourir au corps qui tombe un eſpace double de l'eſpace que fait parcourir au même corps un degré de la *vîteſſe qui s'acquiert.*

Corollaire. L'accélération de la chûte des corps graves ſe fait ſuivant la progreſſion arithmétique des

nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. En effet ſuppoſons que le corps A deſcende pendant trois inſtants, en ſuivant la ligne AB, *Fig.* 2 *Pl.* 6. Suppoſons encore que pendant le premier inſtant de ſa chûte il ne parcoure que 1 pied, je dis qu'il en parcourra 3 pendant le ſecond inſtant, & 5 pendant le troiſieme.

En effet, *par hypotheſe*, le corps A pendant le premier inſtant de ſa chûte ne parcourt qu'un pied en vertu d'un degré de vîteſſe qu'il acquiert peu-à-peu; donc au commencement du ſecond inſtant il aûra 2 degrés de vîteſſe, l'un *acquis* & l'autre qu'il *acquiert*; le premier lui fera parcourir 2 pieds, & le ſecond 1; donc pendant le ſecond inſtant de ſa chûte le corps A parcourra 3 pieds. Au commencement du troiſieme inſtant il aura 3 degrés de vîteſſe, 2 *acquis* & 1 qu'il *acquiert*; ceux-là lui feront parcourir 4 pieds & celui-ci 1; donc pendant le troiſieme inſtant il parcourra 5 pieds; donc l'accélération &c. Cette démonſtration eſt dans le fond la même que celle de l'article 97 de la Mécanique de l'Abbé de la Caille.

Celles des articles 98 & 99 ſe préſentent d'elles-mêmes. On y avance que dans un mouvement uniformément accéléré, les eſpaces parcourus depuis le commencement du mouvement juſqu'à la fin de chacun des intervalles égaux des tems, ſont entr'eux comme les quarrés des tems. L'on a raiſon. En effet ſuppoſons que le corps A tombe pendant deux inſtants de ſuite, je dis que l'eſpace parcouru pendant le premier inſtant ſera à l'eſpace parcouru pendant les deux premiers inſtants, comme le quarré de $1 = 1$, eſt au quarré de $2 = 4$, c'eſt-à-dire, je dis que l'eſpace parcouru pendant le premier inſtant ſera quatre fois moindre que l'eſpace parcouru pendant les deux premiers inſtants.

Démonſtration. Les corps graves qui tombent librement ſur la terre, doivent parcourir & parcourent en effet 15 pieds pendant la premiere *ſeconde* de tems, & 45 pieds pendant la *ſeconde* ſuivante; donc l'eſpace parcouru

parcouru pendant le premier inſtant eſt à l'eſpace parcouru pendant les deux premiers inſtants, comme 15 eſt à 60. Mais 15 : 60 : : 1 : 4 ; donc les eſpaces parcourus par les corps graves, à commencer du premier inſtant de la chûte, répondent aux quarrés des tems employés à les parcourir ; donc l'Abbé de la Caille a eu raiſon d'avancer que dans les mouvements uniformément accélérés, l'on peut faire $e = tt$. Ce qu'il dit depuis l'article 106 juſqu'à l'article 112 incluſivement, ſe comprend à la premiere lecture. Il n'en eſt pas ainſi de l'article 113 ; il a beſoin d'un ample commentaire ; le voici.

L'Abbé de la Caille avance dans cet article que des deux équations $u = \frac{2e}{t}$ & $e = ptt$, on peut tirer 12 formules dont 3 regardent la force accélératrice ou centripéte, 3 la vîteſſe, 3 autres l'eſpace, & les trois dernieres le temps. Examinons en 1er. lieu la bonté des deux équations d'où dérivent ces 12 formules.

Et d'abord il eſt sûr que $u = \frac{2e}{t}$. En effet $e = \frac{ut}{2}$; donc $2e = ut$; donc $\frac{2e}{t} = u$. Il n'eſt pas moins sûr que $e = ptt$; en voici la preuve. Lorſque la force centripéte, ou la force accélératrice de deux corps eſt ſuppoſée la même, l'on a $E = TT$, & $e = tt$; donc lorſque la force accélératrice varie, l'on aura $E = PTT$, & $e = ptt$; donc $\frac{e}{tt} = p$; & c'eſt là la premiere des 12 formules en queſtion.

La ſeconde formule eſt $p = \frac{uu}{4e}$; elle ſe trouve par le calcul ſuivant :

$u = \frac{2e}{t}$	$p = \frac{e}{tt}$
$tu = 2e$	$p = e$ diviſé par $\frac{4ee}{uu}$
$t = \frac{2e}{u}$	$p = \frac{euu}{4ee}$
$tt = \frac{4ee}{uu}$	$p = \frac{uu}{4e}$.

La troiſieme formule eſt $p = \frac{u}{2t}$; en voici le calcul.

$$u = \frac{2e}{t} \qquad p = \frac{e}{tt}$$
$$tu = 2e \qquad p = \frac{tu}{2tt}$$
$$\frac{tu}{2} = e. \qquad p = \frac{u}{2t}.$$

La troiſieme formule $p = \frac{u}{2t}$ donne la quatrieme $2pt = u$.

La cinquieme formule eſt la premiere des deux équations fondamentales.

La ſixieme formule eſt tirée de la ſeconde. En effet $p = \frac{uu}{4e}$, donc $4ep = uu$, donc $\sqrt{4ep} = u$, donc $2\sqrt{ep} = u$.

La ſeptieme formule $e = \frac{1}{2}ut$ eſt donnée par la cinquieme $u = \frac{2e}{t}$. En effet ſi $u = \frac{2e}{t}$, donc $ut = 2e$, donc $\frac{ut}{2} = e$, donc $\frac{1}{2}ut = e$.

La huitieme formule eſt la ſeconde des deux équations fondamentales.

La neuvieme formule $e = \frac{uu}{4p}$ eſt évidemment donnée par la ſeconde $p = \frac{uu}{4e}$.

Il eſt encore évident que la dixieme formule $t = \frac{2e}{u}$ eſt donnée par la cinquieme $u = \frac{2e}{t}$.

La premiere formule $p = \frac{e}{tt}$ donne la onzieme $t = \sqrt{\frac{e}{p}}$ par le calcul ſuivant :

$$p = \frac{e}{tt}$$
$$ptt = e$$
$$tt = \frac{e}{p}$$
$$t = \sqrt{\frac{e}{p}}.$$

Enfin pour trouver la douzieme formule, voici comment a raiſonné l'Abbé de la Caille. $e = ptt$, *par la huitieme formule* ; mais, *par la neuvieme formule*, $e = \frac{uu}{4p}$; donc $ptt = \frac{uu}{4p}$; donc $tt = \frac{uu}{4pp}$; donc $t = \frac{u}{2p}$, & voilà, M., les 12 formules tirées des deux équations $u = \frac{2e}{t}$ & $e = ptt$.

Ce que dit l'Abbé de la Caille, dans les articles 114 & 115, ſur les plans inclinés, n'a beſoin d'aucune explication. Il n'en eſt pas ainſi de l'article 116 ; la démonſtration en eſt très-obſcure ; tâchons de la rendre ſenſible, en nous ſervant de la figure à laquelle cet article renvoie ; c'eſt la figure 6 de la planche 1.

Propoſition. Si du point B on mene la perpendiculaire BK ; AK ſera l'eſpace parcouru par le corps C, tandis que ce corps tomberoit librement de A en B.

Démonſtration. A cauſe des angles droits en B & en K, & de l'angle commun A, les triangles AKB & ABD ſont équiangles ; l'on dira donc AK : AB :: AB : AD ; mais (114) AB : AD :: la vîteſſe que le corps C a acquiſe en deſcendant de A en D : à la vîteſſe que ce même corps auroit acquiſe en tombant librement dans ce tems-là ; donc AK : AB :: la vîteſſe que le corps C a acquiſe en deſcendant de A en D : à la vîteſſe que ce même corps auroit acquiſe en tombant librement dans ce tems-là ; donc tout ce qu'on dit de AB & de AD, lorſque le corps C deſcend de A en D, on le dira de AK & de AB, lorſque le corps C ne deſcend que de A en K ; donc AK marquera la vîteſſe que le corps C a acquiſe en deſcendant de A en K, & AB marquera la vîteſſe qu'il auroit acquiſe en tombant librement dans ce tems-là. Mais AK marque encore l'eſpace que le corps C a parcouru dans tel tems en deſcendant de A en K ; donc AB marquera l'eſpace qu'il auroit parcouru en tombant librement pendant ce tems-là ; donc ſi du point B on

mene la perpendiculaire BK, la partie AK ſera l'eſpace parcouru par le corps C, tandis que ce corps tomberoit librement de A en B.

Le reſte de ce chapitre ne demande, M., pour être compris, qu'une lecture réfléchie, pour vous ſur-tout qui avez préſentes à l'eſprit les propoſitions des élémens des Mathématiques auxquelles l'Auteur renvoie très ſouvent. J'ai l'honneur d'être &c.

LETTRE QUATRIEME.

Néceſſité d'un commentaire pour les articles 126 & 145.

JE viens de finir, M., le dernier chapitre de la premiere partie de la Mécanique de l'Abbé de la Caille. Je ne l'ai bien compris qu'à la troiſieme lecture, & je prévois dès maintenant qu'il doit avoir des rapports eſſentiels avec l'Optique & l'Aſtronomie du même Auteur. Voici en deux mots ce qui me paroît manquer à la perfection de ce chapitre. Je voudrois d'abord les démonſtrations exactes des analogies propoſées dans l'article 126. Je voudrois encore des additions à l'article 145. J'attens avec impatience votre réponſe. Dès que je l'aurai lue, je commencerai la ſeconde partie du même Traité. J'ai l'honneur d'être &c.

RÉPONSE.

Contenant le commentaire de l'article 126 & une remarque ſur l'article 145.

CE que dit l'Abbé de la Caille ſur le mouvement rectiligne relatif, a en effet, M., beaucoup de rapport avec ſon Optique & ſon Aſtronomie, & vous aurez plus que d'une fois beſoin de vous le rappeller, lorſque vous étudierez ces deux Traités; cet Auteur vous

a déja fait remarquer que les analogies de l'article 126, ſont néceſſaires pour trouver le tems & le lieu des conjonctions des Planetes. Appliquons-les à des exemples moins relevés ; il n'en faudra pas d'avantage pour vous en faire connoître la ſûreté.

Suppoſons donc d'abord la ligne AB, *Fig. 3 Pl. 6*, de 20 pieds de long. Suppoſons encore que le corps M, dirigé du point A au point B, parcoure 3 pieds chaque minute, & que le corps N dirigé du point B au point A, n'en parcoure chaque minute que 2 ; pour trouver l'inſtant de leur concours, je dirai *5 pieds, ſomme des eſpaces parcourus dans une minute* : 1 *minute* : : 20 *pieds, diſtance des deux corps* : 4 *minutes*, c'eſt-à-dire que le concours du corps M & du corps N ſe fera après 4 minutes de mouvement. En effet après ce tems-là le corps M aura parcouru 12 pieds, & le corps N 8 ; donc après ce tems-là ces deux corps auront parcouru la ligne entiere AB ; donc préciſément après ce tems-là ils auront dû ſe rencontrer.

Pour avoir le lieu du concours, vous direz : 1 *minute* : 3 *pieds, eſpace parcouru par le corps* M *pendant* 1 *minute* : : 4 *minutes, inſtant du concours trouvé par l'analogie précédente* : 12 *pieds, eſpace que devra parcourir le corps* M *pour rencontrer le corps* N.

Si les corps M, N, *Fig. 4 Pl. 6* étoient allés dans le même ſens vers le point B, vous auriez dit pour trouver l'inſtant du concours, en ſuppoſant ces deux corps éloignés de 2 pieds ; 1 *pied, différence des eſpaces parcourus dans une minute* : 1 *minute* : : 2 *pieds, diſtance des corps* M, N : 2 *minutes*, c'eſt-à-dire que le concours auroit eu lieu après 2 minutes. En effet après ce tems-là le corps M auroit parcouru 6 pieds ; & le corps N 4 ; donc il y auroit eu concours.

Pour avoir le lieu où ſe ſeroit fait le concours, vous direz ; 1 *minute* ; 3 *pieds, eſpace parcouru par le corps* M *pendant* 1 *minute* : : 2 *minutes, inſtant du concours trouvé par l'analogie précédente* : 6 pieds, eſpace que de

vra parcourir le corps M pour rencontrer le corps N. Ces formules appliquées aux planetes, vous donneront le tems & le lieu de leur conjonction.

Pour ce qui regarde l'article 145, je vous ferai remarquer en deux mots qu'il n'a besoin de commentaire que pour ceux qui ne sont pas au fait du système de Copernic, dont l'explication seroit insoutenable dans un Traité de Mécanique. Vous la trouverez d'une maniere très-étendue dans notre Dictionnaire de Physique, à l'article *Copernic*. Je vous conseille cependant de ne faire cette lecture qu'à vos moments de loisir, & de ne pas interrompre pour cela l'étude de la Mécanique. J'ai l'honneur d'être &c.

LETTRE CINQUIEME.

Réflexions sur la plupart des articles qui regardent la rencontre mutuelle des corps.

J'Ai suivi votre conseil, M.; & pour ne pas interrompre la lecture de la Mécanique de M. l'Abbé de la Caille, j'ai renvoyé à un autre tems l'étude du système astronomique & physique du célebre Copernic. Les gens du métier m'ont assuré qu'il me faudroit consacrer un tems considérable à cette étude, si je ne voulois pas me contenter de savoir ce système en Ecolier de Physique. Ils m'ont même effrayé par l'énumération des notions préliminaires qui me seroient nécessaires pour saisir parfaitement le plan de ce grand Astronome. Je ne pense donc maintenant qu'à faire quelques progrès dans la Mécanique, qu'on regarde avec raison comme une des sciences les plus utiles; & les réflexions que j'ai faites sur la maniere dont M. l'Abbé de la Caille donne les regles du mouvement, vous prouveront que j'ai lu à tête reposée le commencement de la seconde partie de son Ouvrage. Permettez-moi de vous les communiquer.

Les regles qui s'obſervent dans le choc des corps, ont pour fondement le théorême ſuivant. *De quelque maniere que deux ou pluſieurs corps en mouvement agiſſent les uns ſur les autres, la ſomme des mouvements, s'ils agiſſent tous dans le même ſens, ou la difference des mouvements, s'ils agiſſent en ſens contraire, eſt toujours conſtante.* C'eſt-à-dire, ſi deux corps qui ſe meuvent du même ſens, viennent à ſe heurter, ils continuent, après le choc, de ſe mouvoir enſemble & dans leur premiere direction avec la ſomme des forces qu'ils avoient avant le choc. La raiſon de cette aſſertion ſe préſente d'elle-même : deux forces conſpirantes ne ſe détruiſent pas par le choc. Mais deux corps qui ſe meuvent du même ſens, ont des forces conſpirantes ; donc elles ne ſe détruiſent pas par le choc ; donc après le choc ils continuent de ſe mouvoir enſemble & dans leur premiere direction avec la ſomme des forces qu'ils avoient auparavant.

Pour deux corps qui ſe meuvent en ſens directement contraire, & qui viennent à ſe heurter, ils vont enſemble après le choc dans la direction du corps le plus fort avec l'excès ou la différence des forces qu'ils avoient avant le choc, parce que deux forces égales ſe détruiſent, lorſqu'elles ſont directement oppoſées l'une à l'autre. Donc dans ce ſecond cas il ne doit reſter, après le choc, que l'excès ou la différence des forces. Donc dans le choc des corps la ſomme ou la différence des mouvements eſt toujours conſtante. Ce raiſonnement me paroît plus ſimple que celui de l'Abbé de la Caille, qui tire ſa démonſtration de l'égalité néceſſaire entre l'action & la réaction.

Après ce théorême général, notre Auteur entre dans le détail le plus intéreſſant. Il aſſure (art. 152) que ſi deux corps non élaſtiques M, *m* viennent avec des viteſſes quelconques V, *u*, ſe choquer, en parcourant en ſens oppoſés une même droite, leur viteſſe *c* après le choc ſera la même dans tous deux, & dans la direction du plus fort ; elle ſera meſurée dans chacun par la dif-

férence du mouvement qu'ils avoient avant le choc, divisée par la somme de leurs masses, ou $c = \frac{MV - mu}{M + m}$.

Sa démonstration me paroît très claire ; il n'est gueres que la derniere conséquence qu'il en tire, qui ait besoin de commentaire. Cette conséquence est conçue en ces termes : *Donc les deux corps choqués s'en vont dans la direction du plus fort, avec des forces qui sont entr'elles comme leurs masses.* Pour comprendre la bonté de cette conséquence, il faut se rappeller que deux corps de différente masse ne peuvent pas se mouvoir avec une égale vîtesse, sans avoir leurs forces en même raison que leurs masses. En voici la démonstration. Soient les deux corps M, m, qui se meuvent avec la vîtesse V ; je dis que leurs forces F, f sont entr'elles comme leurs masses M, m, c'est-à-dire, je dis que $F : f :: M : m$. En effet $F = MV$, $f = mV$; donc $F : f :: MV : mV$; donc $FmV = fMV$; donc $Fm = fM$; donc $F : f :: M : m$.

Que dans le cas dont il s'agit, la formule $\frac{MV - mu}{M + m}$ représente la vîtesse commune après le choc, cela est évident à quiconque sait que la vîtesse est toujours égale à la force d'un corps divisée par sa masse. Mais dans les mouvements opposés la force après le choc est $MV - mu$, & la masse est $M + m$: donc dans ces sortes de mouvements la vîtesse après le choc est $\frac{MV - mu}{M + m}$.

De ce premier théorême se tirent 5 corollaires très intéressants dont il est facile de donner la démonstration.

Corollaire 1. Si $MV = mu$, les deux corps après le choc demeureront immobiles, parce que $MV - mu = 0$, & que par conséquent il n'y aura point de vîtesse commune après le choc. Donc les deux corps demeureront immobiles après le choc, lorsqu'ils avoient, avant le choc, égale masse & égale vîtesse, parce qu'alors $MV = mu$: Donc la même chose arrivera, lorsque les deux corps auront, avant le choc, leurs mas-

ſes réciproquement comme leurs vîteſſes, parce qu'alors l'on a par hypotheſe $M : m :: u : V$, & par conſéquent $MV = mu$.

Corollaire 2. Si les maſſes ſont égales, & les vîteſſes inégales, après le choc les deux corps iront dans le ſens du plus prompt avec la moitié de la différence des vîteſſes, & l'on a alors $c = \frac{V-u}{2}$. Car dans l'hypotheſe des maſſes égales l'on a $c = \frac{MV-Mu}{M+M} = \frac{MV-Mu}{2M} = \frac{V-u}{2}$.

Corollaire 3. Si les maſſes ſont égales, & ſi l'un des deux corps eſt en repos; après le choc les deux corps iront dans le ſens du corps en mouvement, avec la moitié de ſa vîteſſe, & l'on aura $c = \frac{V}{2}$. L'on a en effet dans cette hypotheſe $c = \frac{MV-M\times o}{2M} = \frac{MV}{2M} = \frac{V}{2}$.

Il en arrive de même, lorſque l'un des deux corps n'a avant le choc qu'une vîteſſe infiniment petite, parce qu'une telle vîteſſe peut être regardée comme zero.

Corollaire 4. Si les vîteſſes ſont égales & les maſſes inégales, après le choc les corps iront dans le ſens de celui dont la maſſe eſt la plus grande, avec la vîteſſe commune $c = \frac{M-m}{M+m}$, parce que nous venons de démontrer que, dans le cas des vîteſſes égales, les forces ſont comme les maſſes; donc la différence des forces doit être comme la différence des maſſes; donc ſi en général la vîteſſe commune après le choc eſt égale à la différence des forces avant le choc, diviſée par les deux maſſes, elle ſera dans le cas préſent égale à la différence des maſſes diviſée par les deux maſſes.

Corollaire 5. Si l'un des deux corps M eſt immobile, l'autre corps m après le choc reſtera en repos. La démonſtration qu'en donne M^r. l'Abbé de la Caille eſt très claire, pour quiconque ſe rappelle que $\infty \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} =$

1, & que le quotient qui réſulte de la diviſion d'une quantité finie par une quantité infinie, eſt toujours une quantité infiniment petite. Donc la vîteſſe commune c après le choc eſt une vîteſſe infiniment petite, parce que $c = \frac{1 - mu}{\infty + m}$, & que cette derniere fraction a une quantité finie pour numérateur, & une quantité infinie pour dénominateur. Voilà pour ce qui regarde le choc oppoſé des corps dénués de tout reſſort.

Pour ce qui regarde leur choc conſpirant, il eſt évident que la vîteſſe commune c après cette eſpece de choc eſt repréſentée par la fraction $\frac{MV + mu}{M + m}$, puiſqu'après, comme avant le choc, leur force eſt exprimée par $MV + mu$. Auſſi l'article 158 n'a-t-il beſoin d'aucun commentaire. Il en eſt de même de l'article 159 où l'on aſſure que les corps non élaſtiques ne ſe ſéparent point après le choc direct. Il n'en eſt pas ainſi des corps élaſtiques; ils ſe ſéparent toujours après un choc quelconque. La démonſtration de cette derniere vérité fait la matiere de l'article 160. Elle ne me paroît pas auſſi claire que les précédentes. Auſſi m'en tiens-je pour les corps élaſtiques aux deux regles ſuivantes.

Premiere regle. *Dans le choc des corps élaſtiques, le mouvement direct ſe communique, comme ſi les corps étoient durs.* Parce que la cauſe du reſſort, quelle qu'elle ſoit, n'agit que lorſque le corps reprend, ou tend à reprendre ſa premiere figure.

Seconde regle. *Lorſqu'après le choc deux corps élaſtiques reprennent leur premiere figure, le corps choquant acquiert autant de vîteſſe pour revenir ſur ſes pas, qu'il en avoit perdu par le choc; & le corps choqué acquiert autant de vîteſſe pour aller en avant, qu'il en avoit d'abord gagné par le choc.* Cette ſeconde regle eſt fondée ſur ce principe, *la réaction eſt toujours égale & contraire à l'action.* En effet dans le choc des corps élaſtiques le corps choquant comprime le corps choqué, & celui-ci à ſon tour comprime celui-là; donc en ſe dé-

pendant, le corps choquant doit continuer à pousser en avant le corps choqué, & celui-ci doit pousser en arrière le corps choquant. Vous voyez déja pourquoi le corps choquant reçoit de la vîtesse pour revenir, & le corps choqué pour avancer. Si le premier en reçoit autant pour revenir, qu'il en avoit perdu par le choc, c'eſt que le corps choqué ſe détend avec toute la *vîteſſe directe* qui lui avoit été communiquée; & ſi le ſecond gagne autant de *vîteſſe réflechie*, qu'il en avoit gagné de *directe*, c'eſt que le corps choquant ſe détend comme il s'étoit comprimé, c'eſt-à-dire, il fait d'autant plus ou d'autant moins d'effort pour ſe détendre, qu'il s'étoit plus ou moins comprimé. Mais en ſe comprimant, il avoit communiqué au corps choqué un certain nombre de degrés de *vîteſſe directe*; donc, en ſe détendant, il doit lui en communiquer un pareil nombre de *vîteſſe réflechie*. Donc en général, lorſqu'après le choc, deux corps élaſtiques reprennent leur première figure, le corps choquant acquiert autant de vîteſſe pour revenir ſur ſes pas, qu'il en avoit perdu par le choc; & le corps choqué acquiert autant de vîteſſe pour aller en avant, qu'il en avoit d'abord gagné par le choc.

De ces deux règles nous allons tirer ſans peine toutes les vérités renfermées entre les articles 161 & 180 de la Mécanique de M. l'Abbé de la Caille.

Cet Auteur dit d'abord (art. 161) que ſi deux corps à reſſort parfait ſe choquent, ils ſe ſéparent avec la même vîteſſe relative avec laquelle ils s'approchoient avant le choc. Si, *par exemple*, les corps élaſtiques A & B, égaux en maſſe, ſont dirigés tous les deux vers l'orient l'un avec 6, & l'autre avec 2 degrés de vîteſſe; après le choc ils continueront tous les deux d'avancer avec la même direction, mais ils feront échange de vîteſſe. Pour nous en convaincre, nommons M la maſſe du corps A, V ſa vîteſſe, M la maſſe du corps B, *u* ſa vîteſſe.

Si le corps choqué B étoit ſimplement dur, il iroit

vers l'orient après le choc avec la vîteſſe exprimée par $\frac{MV+Mu}{2M}$. Mais $\frac{MV+Mu}{2M} = \frac{V+u}{2} = 4$; donc ſi le corps choqué B étoit ſimplement dur, il iroit après le choc vers l'orient avec 4 degrés de vîteſſe ; donc le corps B, comme dur, a gagné par le choc 2 degrés de vîteſſe ; donc le corps B, comme élaſtique, acquerra, en reprenant ſa figure, 2 degrés de vîteſſe pour continuer ſa route vers l'orient ; donc il ira vers l'orient avec 6 degrés de vîteſſe.

Pour le corps choquant A, s'il étoit ſimplement dur, il iroit vers l'orient après le choc avec la vîteſſe $\frac{MV+Mu}{2M} = \frac{V+u}{2} = 4$; donc le corps A a perdu par le choc 2 degrés de vîteſſe ; donc, en reprenant ſa figure, il acquerra 2 degrés de vîteſſe pour revenir vers l'occident. Mais il en avoit 4 pour aller vers l'orient ; donc il continuera d'aller vers l'orient avec 2 degrés de vîteſſe ; donc ces deux corps ont fait échange de vîteſſe ; donc, dans les mouvements conſpirants, les corps à reſſort parfait ſe ſéparent après le choc avec la même vîteſſe relative avec laquelle ils s'approchoient avant le choc.

Il en eſt de même des mouvements oppoſés. Suppoſons en effet que les deux corps A & B dont je viens de parler, ſoient dirigés l'un contre l'autre, le corps A vers l'orient, & le corps B vers l'occident ; je dis qu'ils retourneront ſur leurs pas avec échange de vîteſſe. En voici la démonſtration ; elle n'eſt dans le fond qu'un ſimple corollaire des deux loix qui s'obſervent dans le choc des corps élaſtiques.

Si le corps choquant A étoit ſimplement dur, il emporteroit le corps B avec la vîteſſe repréſentée par $\frac{MV-Mu}{2M} = \frac{V-u}{2} = 2$; donc le corps choquant A, conſidéré comme dur, a perdu 4 degrés de vîteſſe, & il n'en a conſervé que 2 pour aller vers l'orient ; donc ce corps, en reprenant ſa figure, acquerra 4 degrés de vîteſſe pour revenir vers l'occident ; donc il reviendra en effet vers l'occident avec 2 degrés de vîteſſe.

Pour le corps choqué B, s'il étoit ſimplement dur, il perdroit la direction qu'il a vers l'occident, & il iroit vers l'orient avec la vîteſſe $\frac{MV - Mu}{2M} = \frac{V - u}{2} = 2$; donc en reprenant ſa figure, il acquerra encore 2 degrés de vîteſſe pour aller vers l'orient; donc le corps B, conſidéré ſeulement comme corps choqué, iroit vers l'orient avec 4 degrés de vîteſſe.

Puiſqu'il s'agit ici d'un choc oppoſé, le corps B n'eſt pas ſeulement corps choqué, il eſt encore corps choquant; & c'eſt en cette qualité qu'il reprend pour revenir vers l'orient les deux degrés de vîteſſe qui le portoient vers l'occident. Mais le corps B, comme corps choqué, alloit déja vers l'orient avec 4 degrés de vîteſſe; donc ce corps conſidéré ſous tous ſes rapports, je veux dire, comme corps choqué, & comme corps choquant, iroit vers l'orient avec 6 degrés de vîteſſe.

Avant le choc, le corps A alloit vers l'orient avec 6 degrés de vîteſſe; & après le choc il revient vers l'occident avec 2 degrés ſeulement. De même avant le choc, le corps B alloit vers l'occident avec 2 degrés de vîteſſe, & après le choc il revient vers l'orient avec 6 degrés; donc ſi deux corps élaſtiques égaux en maſſe & inégaux en vîteſſe, ſont dirigés l'un contre l'autre, ils retourneront avec échange de vîteſſe; donc dans les mouvements oppoſés, comme dans les mouvements conſpirants, les corps à reſſort parfait ſe ſéparent après le choc avec la même vîteſſe relative avec laquelle ils s'approchoient avant le choc.

M. l'Abbé de la Caille conclut de cette propoſition (art. 162) que *la diſtance des corps choqués eſt égale dans des tems pris à égale diſtance de l'inſtant du choc*, c'eſt-à-dire, qu'une minute après le choc la diſtance des corps choqués eſt égale à celle où ils ſe trouvoient une minute avant le choc: la raiſon qu'il en apporte, c'eſt que les forces égales font des efforts égaux ſur les mêmes corps. Mais il s'agit ici de forces égales, puiſque

la vîteſſe relative eſt la même avant & après le choc ; donc &c.

L'article 163 préſente une formule admirable, de laquelle il eſt aiſé de déduire tout ce qui arrive aux corps élaſtiques qui vont dans le même ſens, & qui ſe choquent avec des vîteſſes quelconques. Il y eſt démontré, comme 2 & 2 font 4, qu'après le choc le corps choquant M a une vîteſſe abſolue repréſentée par la fraction $\frac{MV+2mu-mV}{M+m}$, & que celle du corps choqué m eſt exprimée par la fraction $\frac{2MV+mu-Mu}{M+m}$. Dans cette formule V ſuppoſe pour la vîteſſe abſolue du corps choquant avant le choc, & u pour celle du corps choqué avant le même choc. Pour la vîteſſe du corps choquant après le choc on la nomme x, & celle du corps choqué après le même choc on l'appelle z. Voyons donc ſi la formule $x=\frac{MV+2mu-mV}{M+m}$, & $z=\frac{2MV+mu-Mu}{M+m}$ ſert à réſoudre tous les cas qui arrivent dans le choc conſpirant des corps à reſſort parfait.

1°. L'expérience nous apprend que deux corps élaſtiques égaux en maſſe vont dans le même ſens, après avoir échangé leurs vîteſſes pendant le choc. En effet en ſuppoſant $M=m$, l'on aura $x=\frac{MV+2Mu-MV}{2M}$; donc $x=\frac{2Mu}{2M}$; donc $x=u$. Mais x eſt la vîteſſe du corps choquant après le choc, & u celle du corps choqué avant le choc ; donc après le choc le corps choquant ſe meut avec la vîteſſe qu'avoit le corps choqué avant le choc.

De même, en ſuppoſant $M=m$, l'on a $z=\frac{2MV+Mu-Mu}{2M}$; donc $z=\frac{2MV}{2M}$; donc $z=V$. Mais z eſt la vîteſſe du corps choqué après le choc, & V celle du corps choquant avant le choc ; donc après le choc le corps choqué ſe meut avec la vîteſſe qu'avoit le corps choquant avant le choc ; donc deux corps élaſ-

ciques égaux en masse vont dans le même sens, après avoir échangé leurs vîtesses pendant le choc. Nous avons déja vu avec quelle facilité ce cas se déduisoit des deux regles de mouvement que nous avons substituées à la démonstration de l'article 160.

2°. Si un corps en choque un autre égal en masse & en repos; le choquant reste en repos après le choc, & le choqué va dans la même direction, & avec la même vîtesse que celle qu'avoit le corps choquant avant le choc; c'est-à-dire, qu'il faut tirer de la formule donnée $x = 0$, & $z = V$. L'on a par la formule $x = \frac{MV + 2mu - mV}{M + m}$. Mais par hypothese $M = m$, & $u = 0$; donc $x = \frac{MV + 0 - MV}{2M}$; donc $x = 0$.

L'on a encore par la formule $z = \frac{2MV + mu - Mu}{M + m}$; donc à cause de $u = 0$, & $M = m$, l'on aura $z = \frac{2MV}{2M}$; donc $z = V$.

L'on tire le même résultat de nos deux regles générales du mouvement. Supposons donc les corps élastiques égaux A & B. Supposons encore que le corps B soit en repos. Supposons enfin que le corps A dirigé vers l'orient vienne le frapper avec 6 degrés de vîtesse; vous verrez le corps A réduit au repos, tandis que le corps B s'avancera vers l'orient avec 6 degrés de vîtesse. En effet si ces deux corps étoient simplement durs, ils se feroient mus après le choc vers l'orient avec 3 degrés de vîtesse chacun. Mais à cause de son élasticité le corps A acquiert trois degrés de vîtesse pour revenir sur ses pas; il doit donc demeurer immobile, parce qu'il avoit conservé 3 degrés de vîtesse pour aller en avant. De même le corps B, aussi élastique que le corps A, reprend après le choc sa premiere figure; & c'est en la reprenant qu'il acquiert encore 3 degrés de vîtesse pour aller en avant; il doit donc s'avancer avec 6 degrés de vîtesse vers l'orient; donc si un corps élastique en choque un autre égal

en maſſe & en repos, le choquant reſte en repos après le choc, & le choqué va dans la même direction & avec la même vîteſſe que celle qu'avoit le corps choquant avant le choc.

3°. Si le corps choqué eſt en repos, & ſi ſa maſſe eſt plus petite que celle du choquant; après le choc ils vont tous deux dans la direction qu'avoit le corps choquant avant le choc. La démonſtration de M. l'Abbé de la Caille n'a pas beſoin de commentaire; il eſt impoſſible de la préſenter d'une maniere plus claire; auſſi nous contenterons-nous de prouver que nos deux regles donnent le même réſultat. Suppoſons donc les deux corps élaſtiques A & B, dont l'un ait 3 livres de maſſe & 4 degrés de vîteſſe, & l'autre ſoit en repos, & ait une livre de maſſe. Suppoſons encore que le corps choquant A ſoit dirigé vers l'orient; je dis qu'après le choc ces deux corps continueront à aller vers l'orient. En voici la preuve. Si les corps A & B étoient ſimplement durs, ils iroient après le choc vers l'orient avec la vîteſſe $\frac{MV}{M+m} = 3$. Mais à cauſe de ſon élaſticité le corps choquant A acquiert un degré de vîteſſe pour revenir ſur ſes pas; il doit donc continuer ſa route avec 2 degrés de vîteſſe, puiſqu'après le choc il avoit conſervé 3 degrés de vîteſſe pour aller vers l'orient.

De même le corps élaſtique B reprend après le choc ſa premiere figure, & en la reprenant il acquiert encore 3 degrés de vîteſſe pour continuer ſa route vers l'orient; le corps choqué B avancera donc vers l'orient avec 6 degrés de vîteſſe; donc ſi le corps choqué eſt en repos, & ſi ſa maſſe eſt plus petite que celle du choquant, après le choc ils vont tous deux dans la direction qu'avoit le corps choquant avant le choc.

4°. Si le corps choqué eſt en repos, & ſi ſa maſſe ſurpaſſe celle du choquant, celui-ci reculera après le choc. Nous tirerons encore cette vérité de nos deux regles générales du mouvement; car il n'y a rien à ajou-

ter

ter à la démonſtration qu'en donne M. l'Abbé de la Caille. Je dis donc que ſi le corps A de 2 livres de maſſe, eſt dirigé vers l'orient avec une vîteſſe quelconque; il reviendra ſur ſes pas, ſuppoſé qu'il rencontre le corps B plus gros que lui, en repos. Donnons, pour nous en convaincre, 6 degrés de vîteſſe vers l'orient au corps choquant A, & 4 livres de maſſe au corps choqué B.

Si le corps choquant A étoit ſimplement dur, il continueroit d'aller vers l'orient après le choc avec la vîteſſe $\frac{m\,V}{M+m} = 2$; donc le corps A a perdu par le choc 4 degrés de vîteſſe; donc, en reprenant ſa figure, il acquerra 4 degrés de vîteſſe pour aller vers l'occident; mais il en a conſervé 2 pour aller vers l'orient, donc il retournera vers l'occident avec 2 degrés de vîteſſe. Voilà pour ce qui regarde le choc conſpirant des corps élaſtiques.

M. l'Abbé de la Caille détermine à *l'article* 171 tout ce qui arrive à deux corps élaſtiques M, *m* qui ſe choquent en allant en ſens oppoſés avec des vîteſſes données V, *u*. Il appelle x la vîteſſe du corps M, & z celle du corps *m* après le choc; & il démontre qu'après le choc l'on a toujours $x = \frac{MV - mV - 2mu}{M+m}$, & $z = \frac{2MV + Mu - mu}{M+m}$. C'eſt de ces deux formules qu'il tire tous les cas particuliers qui regardent le choc des corps à reſſort parfait qui viennent en ſens oppoſés. Comme ce qu'il dit ſur cette matiere n'a pas, pour l'ordinaire, beſoin de Commentaire, nous allons tirer de nos deux regles générales ce que M. l'Abbé de la Caille a tiré de ſes formules.

1°. Si les maſſes & les vîteſſes ſont égales, après le choc les corps reculent tous deux avec la même vîteſſe qu'ils avoient avant le choc. En effet ſi les deux corps dont il s'agit, étoient ſimplement durs, ils demeureroient immobiles après le choc. Mais ils ſont tous les deux élaſtiques, & tous les deux corps choquants; donc ils doivent, en ſe remettant dans leur premier état, reprendre pour revenir ſur leurs pas toute la vîteſſe qu'ils avoient d'abord perdue par le choc. Mais, par le choc, chaque corps avoit

perdu toute ſa vîteſſe ; donc après le choc chaque corps doit rejaillir avec ſon ancienne vîteſſe.

2°. Si les vîteſſes ſont égales, un corps arrêtera par le choc le mouvement d'un autre corps triple en maſſe ; mais il reculera avec une vîteſſe double de celle qu'il avoit avant le choc. Suppoſons le corps M de trois livres de maſſe, dirigé vers l'orient avec 2 degrés de vîteſſe, & le corps m d'une livre dirigé vers l'occident avec la même vîteſſe. Si ces deux corps étoient ſimplement durs, tous les deux iroient après le choc vers l'orient avec la vîteſſe $\frac{MV-mV}{M+m} = 1$. Mais le corps choquant M acquiert, en reprenant ſa figure, 1 degré de vîteſſe pour revenir vers l'occident ; donc il demeurera immobile, puiſqu'il a 1 degré de vîteſſe pour aller vers l'orient, & 1 degré pour revenir vers l'occident.

Pour le corps m, il doit être conſidéré comme corps choqué & comme corps choquant ; comme corps choqué, il acquiert encore, en reprenant ſa figure, 1 degré de vîteſſe pour continuer ſa route vers l'orient ; & comme corps choquant, il reprend pour revenir vers l'orient les 2 degrés de vîteſſe qu'il avoit avant le choc, & qui le porteroient vers l'occident ; donc il rejaillira vers l'orient avec 4 degrés de vîteſſe ; donc ſi les vîteſſes ſont égales, un corps arrêtera par le choc le mouvement d'un autre corps triple en maſſe, mais il reculera avec une vîteſſe double de celle qu'il avoit avant le choc.

La formule de l'Abbé de la Caille donne le même réſultat. Faiſons $V = u$, & $M = 3m$. Au lieu d'avoir $x = \frac{MV-mV-2mu}{M+m}$, l'on aura $x = \frac{MV-3mV}{M+m} = 0$. Mais x marque la vîteſſe du corps M après le choc ; donc après le choc le corps M demeurera immobile.

De même au lieu d'avoir $z = \frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$; l'on aura $z = \frac{3MV-mV}{M+m} = \frac{18-2}{4} = 4$. Mais z marque la vîteſſe du corps m après le choc ; donc après le choc le

corps m ira vers l'orient avec 4 degrés de vîteſſe. Mais avant le choc le corps m étoit dirigé vers l'occident avec 2 degrés de vîteſſe ; donc le corps m a en effet arrêté le mouvement du corps M triple en maſſe, & il a reculé avec une vîteſſe double de celle qu'il avoit avant le choc.

3°. Si un corps plus que triple en choque un autre qui ait une égale vîteſſe, le choquant ne changera pas de direction ; pourquoi ? parce que, en ſuppoſant M plus grand que $3\,m$, la formule $x = \frac{MV - 3mV}{M + m}$ devient une quantité poſitive. Nos deux regles générales donnent le même réſultat. Suppoſons, pour nous en convaincre, le corps M de 4 livres dirigé vers l'orient avec 2 degrés de vîteſſe, & le corps m d'une livre dirigé vers l'occident avec la même vîteſſe. Si ces deux corps étoient ſimplement durs, ils iroient tous les deux après le choc vers l'orient avec la vîteſſe $\frac{MV - mV}{M + m} = \frac{6}{5}$. Mais le corps choquant M eſt élaſtique ; dont il acquiert, en reprenant ſa figure, $\frac{4}{5}$ de vîteſſe pour revenir vers l'occident ; donc il continue après le choc à aller vers l'orient avec $\frac{2}{5}$ de vîteſſe ; donc ſi un corps plus que triple en choque un autre avec une égale vîteſſe, le choquant ne changera pas de direction.

4°. Si un corps moins que triple en choque un autre qui ait une égale vîteſſe, le corps choquant reculera, parce qu'on ne peut pas ſuppoſer M moindre que $3\,m$, ſans que la formule $x = \frac{MV - 3mV}{M + m}$ devienne une quantité négative. Ceci eſt encore un corollaire de nos deux regles générales du mouvement. Pour le prouver, faiſons M de 2 livres de maſſe, & dirigeons ce corps vers l'orient avec 2 degrés de vîteſſe ; dirigeons au contraire vers l'occident avec la même vîteſſe le corps m d'une livre de maſſe. Si ces deux corps étoient ſimplement durs, ils iroient tous les deux après le choc vers l'orient avec la vîteſſe

$\frac{MV-mV}{M+m} = \frac{2}{3}$ de degré. Mais ils ſont élaſtiques, & le corps choquant M a perdu $\frac{4}{3}$ de degrés de vîteſſe; donc, en reprenant ſa figure, il reprend $\frac{4}{3}$ de degrés pour revenir vers l'occident; donc il revient en effet vers l'occident avec $\frac{2}{3}$ de degré de vîteſſe, puiſqu'il avoit conſervé $\frac{2}{3}$ de degré pour continuer ſa route vers l'orient; donc ſi un corps moins que triple, en choque un autre qui ait une égale vîtéſſe, le corps choquant reculera.

5°. Si deux corps de maſſe égale ſe choquent avec des vîteſſes inégales, ils reculeront tous deux après avoir échangé leur vîteſſe; parce qu'en faiſant $M = m$, l'on aura $x = \frac{MV-MV-2Mu}{2M} = -u$, c'eſt-à-dire, qu'après le choc le corps M prendra pour reculer la vîteſſe que le corps m avoit avant le choc.

L'on aura encore $z = \frac{2MV+Mu-Mu}{2M} = V$, c'eſt-à-dire, qu'après le choc le corps m prendra pour aller dans la premiere direction du corps M, ou pour reculer, la vîteſſe que ce corps M avoit avant le choc.

Tirons la même vérité de nos deux regles générales du mouvement. Je dirige le corps M vers l'orient avec 2 livres de maſſe & 4 degrés de vîteſſe, & le corps m vers l'occident avec la même maſſe & 2 degrés de vîteſſe. Si ces deux corps étoient ſimplement durs, ils iroient après le choc vers l'orient avec la vîteſſe $\frac{MV-mu}{M+m} = 1$; donc le corps choquant M a perdu par le choc 3 degrés de vîteſſe; donc en reprenant ſa figure, il reprend 3 degrés de vîteſſe pour revenir vers l'occident; mais il en avoit conſervé un pour continuer ſa route vers l'orient; donc il recule vers l'occident avec 2 degrés de vîteſſe, c'eſt-à-dire, avec la vîteſſe du corps m avant le choc.

Pour le corps m, il eſt corps choqué & corps choquant. Comme corps choqué, il acquiert encore 1 degré

de vîteſſe pour aller vers l'orient; & comme corps choquant, il en prend 2 pour revenir vers l'orient. Mais le corps *m* avoit déja gagné par le choc 1 degré de vîteſſe pour aller vers l'orient; donc ce corps, conſidéré ſous tous ſes rapports, va après le choc vers l'orient avec 4 degrés de vîteſſe, c'eſt-à-dire, avec la vîteſſe du corps M avant le choc. Mais le corps *m* avoit d'abord été dirigé vers l'occident; donc le corps *m* recule en effet après le choc avec la premiere vîteſſe du corps M; donc ſi deux corps de maſſe égale ſe choquent avec des vîteſſes inégales, ils reculeront tous deux après avoir échangé leur vîteſſe.

6°. Si un corps en choque un autre dont la maſſe & la vîteſſe ſont différentes, le choquant perdra tout ſon mouvement dans le choc, ſi le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe eſt égal au produit de la maſſe du choqué par la ſomme du double de ſa vîteſſe, & de la vîteſſe du choquant. Cette vérité ſe tire ſans peine de la formule de M. de la Caille; voyons ſi nous la déduirons avec autant de facilité de nos deux regles du mouvement. Je dirige vers l'orient le corps M avec 2 livres de maſſe, & 4 degrés de vîteſſe. Je dirige vers l'occident le corps *m* avec 1 livre de maſſe & 2 degrés de vîteſſe. C'eſt-là le cas où $MV = mV + 2mu$. Si ces deux corps étoient ſimplement durs, ils iroient tous les deux vers l'orient avec la vîteſſe $\frac{MV - mu}{M+m} = 2$; donc le corps M a perdu par le choc 2 degrés de vîteſſe, & il en a conſervé 2 pour continuer ſa route vers l'orient; donc ce même corps, en reprenant ſa figure, ſera réduit au repos, puiſqu'il acquiert alors 2 degrés de vîteſſe pour revenir vers l'occident.

7°. Si un corps en choque un autre dont la maſſe & la vîteſſe ſont différentes; le choquant reculera ſi le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe eſt plus petit que le produit de la maſſe du choqué par la ſomme du double de ſa vîteſſe & de la vîteſſe du choquant. Suppoſons $V = 3$, & ſuppoſons tout le reſte comme dans l'article précédent;

c'eſt-là le cas où M V eſt plus petit que $m V + 2 m u$; c'eſt-là donc le cas où le corps M recule après le choc, parce que $x = \frac{M V - m V - 2 m u}{M + m}$ devient une quantité négative. Tout cela ſuit de nos deux regles générales. Si ces deux corps étoient ſimplement durs, ils iroient tous les deux vers l'orient après le choc avec la vîteſſe $\frac{M V - m u}{M + m} = \frac{4}{3}$; donc le corps choquant M a perdu par le choc $\frac{5}{3}$ de degrés de vîteſſe; donc il les reprend pour reculer, en reprenant ſa figure; donc il recule en effet avec $\frac{1}{3}$ de degré de vîteſſe, puiſqu'il avoit conſervé $\frac{4}{3}$ de degrés pour avancer.

8°. Si un corps en choque un autre dont la maſſe & la vîteſſe ſont différentes, le choquant gardera ſa premiere direction, lorſque le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe excédera le produit de la maſſe du choqué par la ſomme du double de ſa vîteſſe & de la vîteſſe du choquant. Suppoſons $V = 5$, & ſuppoſons tout le reſte comme au *num.* 6; c'eſt-là le cas où M V eſt plus grand que $m V + 2 m u$, & c'eſt-là le cas par conſéquent où le corps M continue après le choc d'avancer vers l'orient, parce que $x = \frac{M V - m V - 2 m u}{M + m}$ devient une quantité poſitive. Nos deux regles générales ne ſe trouvent pas plus ici en défaut que dans les articles précédents. Si les deux corps M, m étoient ſimplement durs, ils iroient tous les deux après le choc vers l'orient avec la vîteſſe $\frac{M V - m u}{M + m} = \frac{8}{3}$; donc le corps choquant M a perdu par le choc $\frac{7}{3}$ de degrés de vîteſſe; donc, en reprenant ſa figure, il les reprend pour reculer vers l'occident; donc il avance vers l'orient avec $\frac{1}{3}$ de degré de vîteſſe, puiſqu'il avoit

conſervé $\frac{8}{3}$ de degrés pour aller vers l'orient. Voilà, Monſieur, les remarques que j'ai faites en liſant ce qu'a écrit M. l'Abbé de la Caille ſur le choc direct des corps élaſtiques & non élaſtiques. Je ne puis entreprendre que dans quelques jours l'étude de ce qu'il a écrit ſur leur choc oblique. Comme cette matiere me paroît difficile, vous me feriez plaiſir de m'en éclaircir les points que vous croirez être au-deſſus de ma portée. Par-là vous me ferez faire en peu de tems les progrès les plus rapides dans une ſcience pour laquelle je prends tous les jours plus de goût. J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE.

Réflexions ſur les articles 182, 188, 189, 194, 198, 199 & 200.

IL n'eſt rien qui ſoit au-deſſus de votre portée, M., dans le chapitre où M. l'Abbé de la Caille traite du choc oblique des corps élaſtiques & non élaſtiques. A parler en général, les matieres y ſont préſentées d'une maniere très-claire & très-facile, ſur-tout pour un homme qui n'a pas été arrêté dans la lecture des regles qui regardent le choc direct des mêmes corps. Je vous avouerai cependant que j'aurai quelque choſe à vous dire ſur les articles 182, 188, 189, 194, 198, 199 & 200.

A l'article 182, *par exemple*, il aſſure que le problême de l'article précédent ſeroit impoſſible, ſi la ligne G C de la figure à laquelle il renvoie, étoit plus petite que la perpendiculaire tirée de C ſur F K. Il me paroît que G C eſt toujours plus grande que cette perpendiculaire, puiſqu'elle devient la baſe d'un triangle rectangle dont cette même perpendiculaire eſt un des côtés. Cette remarque de M. l'Abbé de la Caille eſt donc inutile, j'ai preſque dit déplacée. Peut-être me trompé-je dans ma critique. Mais enfin s'il eſt un cas où G C ſoit plus petite que la

perpendiculaire tirée de C ſur F K; ce cas eſt aſſez rare, pour que notre Auteur en démontrât la réalité par une figure particuliere; on ne doit jamais préſenter comme un principe, ce que les gens du métier ne ſaiſiſſent pas à la premiere lecture. M. l'Abbé de la Caille dit enſuite que quand G C eſt égale à la perpendiculaire tirée de G ſur F K, alors les deux corps dont il s'agit ne ſe peuvent toucher qu'une fois. Je comprends bien comment les deux corps ne ſe touchent qu'une fois, lorſque G C eſt confondue avec la perpendiculaire tirée de C ſur F K; mais je ne comprends pas comment G C peut devenir égale à cette perpendiculaire. Contentons-nous donc de démontrer que lorſque la perpendiculaire tirée de C ſur F K eſt égale à la ſomme des demi-diametres des deux corps donnés, ces deux corps ne peuvent ſe toucher qu'une fois.

Soit A C la direction du corps A, fig. 5. pl. 6, & ſa vîteſſe $= a$; ſoit B C la direction du corps B & ſa vîteſſe $= b$. Soit B C la diagonale du quarré parfait A B C F; le point K le milieu de cette diagonale; & ſuppoſons que $a : b :: A C : B K$.

Suppoſons encore que C K eſt égale à la ſomme des demi-diametres des deux corps A & B. Tirons enfin du point F la ligne F K qui ſera néceſſairement perpendiculaire ſur la diagonale B C; je dis que les points K & C ſeront les lieux des centres des corps donnés, à l'inſtant de leur contact.

Démonſtration. L'on a par ſuppoſition, $a : b :: A C : B K$; donc le centre du corps B ſera au point K, lorſque celui du corps A eſt au point C. Mais le centre du corps B ne peut pas être au point K, lorſque celui du corps A eſt au point C, ſans que ces deux corps ſe touchent, puiſque C K eſt égale à la ſomme des demi-diametres des deux corps donnés; donc les points K & C ſeront les lieux des centres des corps donnés, à l'inſtant de leur contact.

Que les deux corps donnés ne ſe touchent qu'une ſeule fois, cela eſt évident à l'inſpection ſeule de la figure.

Il n'eſt en effet que les points K & C où les corps A & B ſoient éloignés préciſément de la longueur de leurs demi-diametres, dans le tems que l'un va de A en C, & l'autre de B en K. Le reſte de l'article 182 ne demande aucun éclairciſſement particulier.

L'article 188 ne préſente aucune difficulté réelle. On tire des deux regles ordinaires du mouvement le même réſultat que celui que donnent les deux formules de M. l'Abbé de la Caille. En effet, ſi les corps Q & K, *Fig.* 16 *Pl.* 2, étoient ſimplement durs, ils iroient après le choc vers le point L avec la vîteſſe commune $\frac{MV-mu}{M+m} = \frac{23}{10} = 2, 3$; donc le corps choquant Q a perdu par le choc 2, 7 de vîteſſe; donc, en reprenant ſa figure, il reprendra 2, 7 de vîteſſe pour revenir vers le point G; donc il tendra à revenir vers le point G avec $\frac{4}{10}$ de vîteſſe, parce qu'il a en même-tems 2, 3 de vîteſſe pour avancer, & 2, 7 de vîteſſe pour reculer.

Pour le corps K qui a déja 2, 3 de vîteſſe pour avancer vers le point L, il eſt en même-tems corps choqué & corps choquant. Comme corps choqué, il acquiert encore, en reprenant ſa figure, 2, 3 de vîteſſe pour avancer; donc, comme corps choqué, il iroit vers le point L avec 4, 6 de vîteſſe. Mais le corps K eſt encore corps choquant, & comme tel, il reprend pour rejaillir vers le point L les 4 degrés de vîteſſe qu'il avoit avant le choc pour aller vers le point G; donc le corps K, conſidéré ſous tous ſes rapports, tendra vers le point L avec 8, 6 de vîteſſe.

Pour l'intelligence de l'article 189, il faut ſe rappeller que, prendre négativement une formule algébrique, c'eſt en changer les ſignes + en —, & les ſignes — en +. Or la valeur de Q P doit être priſe négativement dans le cas dont il s'agit, parce que le corps Q tend à revenir vers le point G avec $\frac{4}{10}$ de vîteſſe. Il faut encore

ſe rappeller que $\frac{-MV+mV+2mu+2MV+Mu-mu}{M+m} = V+u$. En effet l'on a, en ôtant les quantités qui ſe détruiſent, $\frac{MV+mV+Mu+mu}{M+m}$. Or cette derniere fraction eſt évidemment égale à $V+u$, puiſque $V+u$ eſt le quotient exact de $MV+mV+Mu+mu$ diviſé par $M+m$; donc . . . . . $\frac{-MV+mV+2mu+2MV+Mu-mu}{M+m} = V+u$.

L'article 194 qui paroît d'abord de très-peu de conſéquence, eſt cependant celui que je crois devoir commenter avec le plus de ſoin. M. l'Abbé de la Caille y définit ce que c'eſt que toucher une bille *pleine* : c'eſt, *dit-il*, la toucher enſorte que la ligne qui joint les centres dans le choc, ſoit dans la direction de la bille touchante. Il ajoute enſuite qu'une bille qui touche *pleine* une autre bille en repos, doit s'arrêter auſſi-tôt. Il auroit dû faire remarquer que ce cas ne peut avoir lieu, s'il eſt vrai qu'il ait jamais lieu, que lorſque les maſſes des deux billes ſont géométriquement égales. Mais cette omiſſion n'eſt pas ce qu'il y a de plus répréhenſible dans cet article. Pour que la bille qui choque, s'arrêtât auſſi-tôt, il faudroit que dans le choc l'applatiſſement des deux billes fût très-conſidérable, comme vous l'avez remarqué dans votre derniere lettre. Or M. l'Abbé de la Caille ſuppoſe, quelques lignes auparavant, que l'applatiſſement des billes eſt une quantité infiniment petite ; comment un pareil applatiſſement peut-il produire le repos dans la bille touchante ?

D'ailleurs la regle qui dit que ſi un corps élaſtique choque un autre corps élaſtique, égal en maſſe & en repos, le corps choquant reſte en repos après le choc, cette regle, dis-je, eſt bien vraie ; mais elle ſuppoſe que le corps choquant n'a qu'un mouvement ſimple direct, tel qu'eſt le mouvement que les joueurs communiquent à leur boule, lorſqu'ils veulent, comme l'on dit, tirer *en place* ; & la bille dont il s'agit ici, a un mouvement très-

composé, ou pour parler plus exactement, deux mouvements, l'un en ligne droite, & l'autre de rotation sur elle-même. Je ne crois pas donc qu'une bille qui, en roulant sur le tapis, touche *pleine* une autre bille, doive s'arrêter aussi-tôt, lors même que les deux billes sont géométriquement égales.

L'article 198 ne doit pas être adopté purement & simplement. En effet si l'article 194 contient une fausseté, il n'est pas vrai qu'après le choc la bille B, *fig. 22. pl. 2*, parcoure la ligne EG, parce que par le choc cette bille n'a pas perdu tout son mouvement représenté par EO; mais l'article 194 contient une fausseté; donc après le choc la bille B ne doit pas parcourir la ligne EG.

La même faute se trouve aux articles 199 & 200. Après le choc la bille F de la figure 22 gravée pour ces deux articles, ne devroit pas suivre la ligne PQ, parce que par le choc cette bille n'a pas perdu tout son mouvement MP.

Voilà, Monsieur, des réflexions qu'il n'étoit pas bien nécessaire de vous communiquer. Je suis convaincu que vous les aurez faites vous-même, si vous avez lu le chapitre du choc oblique, avant la réception de cette lettre. Elles se présentent comme d'elles-mêmes à tout homme qui sait les premiers élements des Mathématiques; & je ne sais comment elles ont échappé à un mathématicien aussi célebre que M. l'Abbé de la Caille. Cela n'empêche pas cependant que son Traité de Mécanique ne soit un très-bon ouvrage. Vous serez très-content de ce qu'il a écrit sur les machines. Je vous conseille d'en commencer l'examen le plutôt qu'il vous sera possible. Je suis, &c.

LETTRE SIXIEME.

Contenant des réflexions sur les articles 212, 213, 217 & 220.

JE n'ai encore lu de la seconde section, Monsieur, que ce que notre Auteur a écrit sur les machines considérées en général; je ne crois pas qu'il soit possible de dire plus de choses en moins de mots que lui. Il me paroît cependant que je n'aurai pas grand besoin de votre secours pour le suivre pas à pas; j'ai assez présents à l'esprit ses éléments de géométrie & d'algébre, pour comprendre les articles 212, 213, 217 & 220, qui seroient les seuls capables d'arrêter un commençant. Qui ne sait pas, *par exemple*, qu'un angle aigu ayant le même sinus droit que l'angle obtus qui lui sert de supplément à deux angles droits, l'angle aigu BDC de la figure relative à l'article 212, doit avoir le même sinus droit que l'angle obtus DCA? Il en est de même du sinus de l'angle aigu BAC; il n'est pas différent de celui de l'angle obtus DCA, dont il est parlé dans le même article. Qui ne sait pas encore que l'angle PCA des figures indiquées à l'article 213, étant égal à son alterne BAC, ces deux angles doivent avoir le même sinus droit? Qui ne sait pas enfin qu'on ne peut pas avoir $MV = mu$, sans avoir $M : m :: u : V$, ou sans avoir les masses réciproquement comme leurs vîtesses, c'est-à-dire, que la démonstration de l'article 217 se trouve à l'article 218?

Pour ce qui regarde l'examen que fait M. l'Abbé de la Caille depuis l'article 219 jusqu'à l'article 225, de l'effet qu'on peut attendre des machines, il ne présente aucune difficulté à quiconque sait manier l'équation $ME = me$, c'est-à-dire, à quiconque sait qu'on peut tirer de cette équation les formules suivantes:

$$E = \frac{me}{M} \qquad e = \frac{ME}{m}$$

$$M = \frac{me}{E} \qquad m = \frac{ME}{e}$$

Or c'eſt bien là ce qu'on peut appeller les premiers commencements de l'algébre; & il faudroit être bien peu avancé dans cette ſcience, pour ne pas voir au premier coup d'œil à quoi conduiſent ces différentes formules. Si vous n'avez rien de particulier à me communiquer ſur les machines conſidérées en général, je paſſerai au plutôt à l'examen des machines ſimples & compoſées. J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE.

JE vous félicite du meilleur de mon cœur, Monſieur, des progrès que vous faites dans l'étude de la Mécanique. Vous pourrez non-ſeulement bientôt vous paſſer de guide, mais encore ſervir de conducteur aux autres dans les routes épineuſes de cette ſcience. Perſonne ne prend plus de part à vos ſuccès que moi, parce qu'il n'eſt perſonne qui ſoit plus ſincérement, &c.

LETTRE SEPTIEME.

Néceſſité d'un Commentaire pour les articles 237 & 238. Examen des articles 240, 241, 242 & 243.

ME voici enfin arrivé, Monſieur, à la partie de la Mécanique que je regarde comme la plus utile & la plus agréable; c'eſt celle qui traite des machines ſimples & compoſées. Comme preſque toutes les machines peuvent ſe rapporter au levier, vous comprenez que j'ai étudié avec tout le ſoin poſſible ce que M. l'Abbé de la Caille a écrit ſur cette matiere. Il prouve très-bien (art. 237. & 238) que la balance & la romaine ſont de

véritables leviers de la premiere espece ; mais il me paroît qu'il auroit dû entrer, en parlant de ces deux machines, dans le détail le plus intéressant ; je vous prie d'y suppléer par un commentaire qui contienne des choses usuelles & de pratique ; c'est-là pour l'ordinaire ce qui manque dans les ouvrages de cet Auteur.

Je comptois avoir encore besoin de votre secours pour la solution entiere du problême proposé à l'article 240 ; mais après une seconde lecture, j'ai vu que je pouvois me tirer d'affaire. Ce problême peut avoir quatre cas. Dans le premier cas on suppose que les deux puissances appliquées au levier sont agissantes, & que leurs directions sont paralleles entr'elles. M. l'Abbé de la Caille prouve par le calcul le plus simple que dans la figure 27 de la planche 2 l'on trouve $AD = \frac{p \times AB}{P+p}$. Il dit ensuite qu'on trouvera par un semblable calcul que $BD = \frac{P \times AB}{P+p}$. Il a raison. En effet l'on a (art. 234) $p : P :: AD$, ou $AB - BD : BD$; donc $p \times BD = P \times AB - P \times BD$; donc $P+p \times BD = P \times AB$; donc $BD = \frac{P \times AB}{P+p}$.

Dans le second cas qui fait la matiere de l'article 241, l'on suppose, comme dans le premier, que les directions des deux puissances sont paralleles ; mais l'on veut que de ces deux puissances l'une soit agissante & l'autre résistante. L'article 213 donne évidemment la proportion $R : P :: AB$, ou $AD + BD : BD$; & de cette proportion l'on tire sans peine $BD = \frac{P \times AD}{R-P}$. Si l'on eût cherché la valeur de AB, on l'auroit tirée de la proportion $P : R :: BD$ ou $AB - AD : AB$; ce qui auroit donné $R \times AB - R \times AD = P \times AB$; donc $R-P \times AB = R \times AD$; donc $AB = \frac{R \times AD}{R-P}$. Enfin pour trouver $p = R - P$, il faut dire $P : p :: DB$ ou $\frac{P \times AD}{R-P} : AD$; donc $P \times AD$

$= p \times \frac{P \times AD}{R-P}$; donc $1 = \frac{p}{R-P}$; donc $p = R - P$.

Le troiſieme cas ne préſente aucune difficulté. L'on y ſuppoſe les deux puiſſances agiſſantes ſuivant des directions obliques, & l'on prouve que la puiſſance réſiſtante eſt repréſentée par la ligne CN. L'on a raiſon. La puiſſance réſiſtante devant retenir en équilibre les deux puiſſances agiſſantes, & celles-ci étant repréſentées par les côtés CI, CL du parallélogramme CLIN de la figure 23 de la planche 2, celle-là doit être exprimée par la diagonale CN du même parallélogramme.

Le quatrieme cas eſt dans le goût du troiſieme. Il eſt impoſſible que l'une des deux puiſſances agiſſantes ſoit à la puiſſance réſiſtante, comme CI eſt à CN de la figure 24 de la planche 2, ſans que l'autre puiſſance agiſſante ſoit repréſentée par la ligne IN ou CL.

Après la ſolution de ce problême, M. l'Abbé de la Caille en vient à la poulie. Je vais entreprendre l'examen de cette machine, en attendant que vous ayiez la bonté de m'envoyer le commentaire des articles 237 & 238. J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE.

Commentaire des articles 237 & 238.

J'En conviens ſans peine avec vous, Monſieur, il eſt impoſſible de ſe former une idée juſte de la balance ADE, *fig. 6 pl. 6*, & de la romaine BCD, *fig. 8 pl. 6*, en liſant les articles 237 & 238 de la Mécanique de M. l'Abbé de la Caille. Je vais y ſuppléer, en donnant à ces deux articles toute l'étendue qu'ils méritent. La balance ADE, & toutes les balances ordinaires doivent être rangées parmi les leviers de la premiere eſpece. La puiſſance appliquée à ce levier eſt repréſentée par le poids de métal que l'on met dans l'un des deux baſſins F, G; le poids par la marchandiſe que l'on met dans l'autre; & le point

d'appui par cette eſpece de clou I, autour duquel ſe meut le *fleau* D E de la balance A D E. Cette machine ne doit ſervir qu'à mettre en équilibre deux quantités égales de matiere. Auſſi ceux qui la conſtruiſent, ont-ils ſoin de partager le *fleau* D E en deux *bras* parfaitement égaux D C, B E. Par la même raiſon ils choiſiſſent deux baſſins égaux F, G; & pour les ſuſpendre aux extrêmités D & E, ils ſe ſervent de cordes auſſi peſantes les unes que les autres. En un mot ils ne regardent la balance vuide comme une machine exacte, que lorſqu'étant ſuſpendue par la *chaſſe* A I, elle demeure dans un parfait équilibre.

Lorſqu'on a quelque marchandiſe précieuſe à acheter, on ne ſauroit examiner avec trop d'attention ſi la balance dont on doit ſe ſervir, a toute la juſteſſe requiſe; la balance fauſſe eſt une machine avec laquelle un vendeur peut faire en un inſtant un tort très-conſidérable à l'acheteur. Suppoſons en effet une balance F B C, *fig.* 7 *pl.* 6, dont le bras B A n'ait que 5 pouces de longueur, tandis que le bras A C en a 6; il arrivera néceſſairement qu'un fripon vous fera payer 6 livres de marchandiſes, tandis qu'il ne vous en livrera que 5; en voici la démonſtration. Un poids de 6 livres placé dans le baſſin D doit être en équilibre avec 5 livres de marchandiſes miſes dans le baſſin E. En effet le poids de métal ayant 6 de maſſe & 5 de vîteſſe, aura 30 de force: pareillement la marchandiſe ayant 5 de maſſe & 6 de vîteſſe, aura auſſi 30 de force; donc le fripon qui ſe ſert de la balance F B C, vous fera payer 6 livres de marchandiſes, tandis qu'il ne vous en livrera que 5.

Vous ne me demanderez pas ſans doute, Monſieur, pourquoi le poids mis dans le baſſin D n'a que 5 degrés de vîteſſe, tandis que la marchandiſe miſe dans le baſſin E en a 6; nous avons ſuppoſé le baſſin D à 5 pouces du point d'appui, & le baſſin E à 6.

Voulez-vous découvrir facilement cette ſupercherie? faites changer de place au poids & à la marchandiſe, c'eſt-à-dire, mettez celle-ci dans le baſſin D, & celui-là dans

dans le baſſin E : l'équilibre ne ſubſiſtera pas ; & comme toute balance juſte doit demeurer en équilibre, lorſque ſes deux baſſins contiennent des poids égaux, vous conclurez que le marchand qui ſe ſert de la balance FBC eſt un très-mal-honnête homme.

J'aurois encore cent choſes intéreſſantes & toutes de pratique, à vous dire ſur la balance ordinaire, ſi je ne ſavois pas que vous avez dans votre bibliotheque les ouvrages de M. l'Abbé Nollet. Je vous exhorte à lire avec attention ſa neuvieme leçon ; vous trouverez entre les pages 66 & 77 tout ce qui pourroit manquer à ce Commentaire.

Pour ce qui regarde la *romaine* BCD, *Fig.* 8 *Pl.* 6, c'eſt encore un levier de la premiere eſpece. La puiſſance eſt repréſentée par le poids mobile M que l'on peut avancer ou reculer à volonté ; le poids, par la marchandiſe *p* que l'on attache au crochet A ; & le point d'appui par cette eſpece de clou C autour duquel la *romaine* ſe meut. Cette machine, compoſée de deux bras inégaux, ſert par-là même à mettre en équilibre deux quantités inégales de matiere. En effet ſi le poids mobile M peſe 10 livres, & que vous le placiez à 6 pouces du point d'appui C, il ſera en équilibre avec 60 livres de marchandiſes que vous attacherez au crochet A, éloigné du point d'appui C d'un pouce ſeulement. La raiſon de cet effet ſe préſente d'elle-même. La force d'un corps ſe connoît en multipliant ſa maſſe par ſa vîteſſe, ou F = MV (59) ; le poids mobile M a 10 de maſſe & 6 de vîteſſe, il a donc 60 de force ; le ballot de marchandiſes attaché au crochet A a 60 de maſſe & 1 de vîteſſe, il a donc 60 de force ; donc par le moyen de la *romaine* BCD ces deux poids doivent être en équilibre.

LETTRE HUITIEME.

Réflexions ſur les 10 premiers articles de la Mécanique de M. l'Abbé de la Caille, qui regardent les poulies mobile & immobile.

DE 11 articles que l'Abbé de la Caille a compoſés ſur les poulies mobile & immobile, j'en ai lu dix avec beaucoup de plaiſir, Monſieur. L'article 244 ne contient que des définitions qui ſe comprennent à la premiere lecture. L'article 245 ne ſeroit difficile que pour ceux qui n'auroient pas préſent à l'eſprit l'article 213. Les articles 246, 247, 248 & 249 n'ont beſoin d'aucun commentaire. Il eſt évident que la poulie fixe ou immobile BCD, *Fig. 9 Pl. 6*, n'augmente en aucune maniere la vîteſſe de la puiſſance A ſur celle du poids E, puiſque ſi celui-ci monte de 2 pieds, il ne paſſe que 2 pieds de corde par les mains de la puiſſance A. Cette machine eſt un levier de la premiere eſpece, c'eſt-à-dire, un levier dont le point d'appui C autour duquel ſe meut la poulie BCD, ſe trouve exactement entre la puiſſance A & le poids E. Les lignes égales CD & CB marquent, l'une la diſtance de la puiſſance A au point d'appui C, l'autre la diſtance du poids E au même point d'appui : nouvelle preuve que la poulie fixe n'augmente pas la vîteſſe de la puiſſance ſur celle du poids.

Pour la poulie mobile BEC, *Fig. 10 Pl. 6*, c'eſt évidemment un levier de la ſeconde eſpece. Le point fixe de cette machine eſt au crochet A auquel on a attaché l'une des extrêmités de la corde ABCD; la puiſſance eſt au point D, & le poids au point R, entre la puiſſance & le point d'appui. A l'aide de cette machine, la puiſſance D a une vîteſſe double de celle du poids R. Pour en concevoir la démonſtration, je me ſuis repréſenté le poids R arrivé au point H ; alors ſa diſtance

au point d'appui A a été marquée par la ligne HA, tandis que la ligne DA, double de HA, a marqué la distance de la puissance D au même point d'appui ; donc une puissance quelconque D qui tire le poids R à l'aide de la poulie mobile BEC, a une vîtesse double de celle du poids. Tout ceci rend très-intelligible les articles 251 & 252 de la Mécanique de l'Abbé de la Caille. Cependant comme il n'arrive pas toujours que les directions de la puissance & du poids soient parralleles entr'elles, il faut, en parlant de la poulie mobile, employer la proportion démontrée à l'article 250. Celle de l'article 253 est encore plus générale ; mais elle a besoin d'un commentaire que je vous prie de m'envoyer. J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE.

Commentaire de l'article 253.

IL n'est que deux endroits de l'article 253 qui aient besoin de commentaire, Monsieur, & ce commentaire bien surement n'auroit pas été au-dessus de vos forces. L'Auteur dit que dans le triangle rectangle DSR de la figure 29 de la planche 2, on a, DS est à DR, comme le sinus total est au cosinus de l'angle SDR. Il falloit relire l'article 747 de ses élémens de Trigonométrie auquel il a soin de renvoyer, & vous auriez d'abord suivi la justesse de cette proportion. Il est en effet démontré dans cet article que dans un triangle rectangle le rayon est à l'hypothénuse, comme le sinus d'un des angles aigus, est au côté opposé à cet angle ; donc dans le triangle rectangle SDR l'on a, le rayon ou sinus total est à l'hypothénuse DS, comme le sinus de l'angle aigu DSR est au côté DR ; donc le sinus total est au sinus de l'angle aigu DSR, comme DS est à DR. Mais le sinus de l'angle aigu DSR est préciſément le cosinus de l'angle d'inclinaiſon SDR ; donc le sinus total est au

cosinus de l'angle SDR, comme DS est à DR.

Il n'est pas aussi facile de démontrer que le triangle rectangle DRS est semblable au triangle rectangle DGK. Pour en venir à bout, je tire la ligne DM parallele à la ligne KG & perpendiculaire à la ligne RG, *Fig. 11 Pl. 6*; je tire encore la ligne SO perpendiculaire à la ligne DM, & parallele à la ligne RG. Cela fait, voici comment je raisonne, après avoir remarqué que par construction le triangle SDN est rectangle en D, & que la ligne DM a partagé le triangle SDN en deux triangles semblables entr'eux.

Le triangle rectangle KNO est évidemment semblable au triangle rectangle DGK. Le même triangle rectangle KNO est évidemment semblable au triangle rectangle DMN. Mais le triangle DMN est évidemment semblable au triangle rectangle DMS, & celui-ci est évidemment semblable au triangle rectangle DRS. Donc le triangle rectangle KNO, & par-là même le triangle rectangle DGK est évidemment semblable au triangle rectangle DRS.

Voilà, Monsieur, des éclaircissemens qui vous mettront en état de comprendre l'article 253 à la premiere lecture que vous en ferez. Vous pouvez ensuite entreprendre l'examen de la machine qu'on appelle le *Tour*; je crois que vous serez content de ce qu'en dit l'Abbé de la Caille. J'ai l'honneur d'être, &c.

LETTRE NEUVIEME.

Remarques sur les 7 articles qui regardent le Tour.

CE que l'Abbé de la Caille a écrit sur le *Tour*, que nous appellons tantôt *Treuil*, & tantôt *Cabestan*, n'a besoin d'aucun commentaire, Monsieur: j'ai compris à la premiere lecture les 7 articles qui ont rapport à cette importante machine; & pour vous prouver que j'ai

ſaiſi la penſée de l'Auteur, je vous dirai que je regarde le Cabeſtan CD, *Fig. 22 Pl 6*, comme un levier de la premiere eſpece, dont le point d'appui par conſéquent ſe trouve entre la puiſſance & le poids. En effet l'axe du cylindre CD, c'eſt-à-dire, une ligne que l'on ſe repréſente paſſer préciſément par le milieu de ce cylindre, eſt évidemment le point d'appui de cette machine, puiſqu'on ne peut pas s'en ſervir ſans la faire tourner ſur ſon axe. On place aux extrêmités *j*, H, E, G des rayons *j* E, H G les puiſſances qu'on veut y appliquer; & l'on attache à l'extrêmité de la corde M N le poids P qu'on veut remuer.

Il eſt peu de machines auſſi propres que celle-ci à augmenter la vîteſſe de la puiſſance ſur celle du poids. En effet, tandis que la puiſſance placée au point *j* décrit un cercle dont le diametre eſt la ligne *j* E, le poids P ne parcourt que la circonférence du cylindre CD; car toutes les fois que la puiſſance *j* décrit ſon cercle, la corde M N entoure une fois ſeulement le cylindre CD. Donc la vîteſſe de la puiſſance dans cette machine eſt à la vîteſſe du poids, comme la circonférence du cercle que décrit la puiſſance eſt à la circonférence du cercle que décrit la corde à laquelle le poids eſt attaché. Mais les circonférences des cercles ſont entr'elles comme leurs rayons; donc la vîteſſe de la puiſſance eſt à celle du poids, comme le rayon du cercle que décrit la puiſſance eſt au rayon du cylindre qui forme le corps du Cabeſtan; donc ſi le rayon du cercle que décrit la puiſſance contient dix fois le rayon du cylindre, la puiſſance aura 10 fois plus de vîteſſe que le poids.

Vous voyez, Monſieur, que je me ſuis formé une idée aſſez nette du *Tour*, en liſant le peu qu'en a dit l'Abbé de la Caille. Il n'en eſt pas ainſi du plan incliné; j'ai déja lu trois à quatre fois des 7 articles qu'il a conſacrés à cette machine, & je ſens que je ne pourrois pas vous en parler avec facilité; il m'eſt reſté dans l'eſprit bien des nuages que la réponſe que vous aurez la bonté

de me faire, ne ſauroit manquer de diſſiper. Si en même-tems vous ſavez ſur le *Tour* quelque choſe qui ſoit plutôt de pratique, que de théorie, vous me ferez plaiſir de me le communiquer. Vous obligerez ſenſiblement celui qui ſera toute ſa vie avec autant de reſpect, que de reconnoiſſance, &c.

RÉPONSE.

Remarques pratiques ſur le Tour & ſur le plan incliné. Commentaire de preſque tous les articles qui regardent cette derniere machine.

VOus êtes auſſi au fait que moi, Monſieur, du méchaniſme du Cabeſtan, & il ſeroit inutile de vous entretenir plus au long de cette importante machine. Je vous dirai cependant en deux mots que ceux qui s'en ſervent, doivent empêcher que ſur le cylindre CD, *Fig. 22 Pl. 6*, il ne ſe faſſe, les unes ſur les autres, pluſieurs circonvolutions de la corde MN à laquelle eſt attaché le poids P. Vous en voyez ſans doute la raiſon. Le cylindre CD faiſant un tout avec la corde qui l'entoure, ſon rayon augmenteroit néceſſairement par les circonvolutions multipliées dont je viens de vous parler. Ce rayon augmentant, la diſtance du poids P au point d'appui, & par-là même ſa vîteſſe, ne ſauroit manquer d'augmenter. Et comme la perfection d'une machine conſiſte à diminuer la vîteſſe du poids, il s'enſuit qu'on ne ſauroit trop empêcher dans la pratique qu'il ne ſe faſſe autour du cylindre du Cabeſtan pluſieurs circonvolutions de corde, les unes ſur les autres.

Par la même raiſon il faut avertir les hommes que l'on applique à cette machine, de ſe placer aux extrêmités *j*, H, E, G des rayons *j*E, HG; c'eſt-là la place qui leur ſera la plus avantageuſe, parce que c'eſt-là la place, d'où ils ſeront le plus éloignés du point d'appui de la

machine. Voilà deux remarques que j'ai voulu vous communiquer, avant que d'en venir à l'examen du plan incliné représenté par la figure 13 de la planche 6.

Le plan incliné BEC eſt une machine compoſée de trois côtés, l'un horizontal BE, l'autre perpendiculaire CE, & le troiſieme oblique BC. Ce troiſieme côté eſt la piece eſſentielle du plan incliné ; il en détermine la longueur, & il forme toujours avec la ligne horizontale BE, ou la baſe du plan, un angle aigu CBE. Pour le côté perpendiculaire CE, il déſigne la hauteur du plan BEC. On ſe ſert de cette machine tantôt pour élever un poids à une hauteur donnée avec plus de facilité, tantôt pour faire deſcendre un poids avec moins de rapidité.

Je veux, par exemple, faire monter juſqu'au point C le poids A placé au point B ; & au lieu de le tirer, d'abord horizontalement de B en E, & enſuite perpendiculairement de E en C, je me mets au point C ; je fais attacher une corde au poids A ; je fais entrer cette corde dans la gorge de la poulie immobile *p* Q, & je tire le poids A par la ligne oblique, ou par le plan incliné BC : l'on demande de quelle utilité m'a été cette machine. Je réponds qu'à l'aide d'un plan incliné quelconque BEC, la vîteſſe de la puiſſance : à celle du poids : : la longueur BC du plan BEC : à ſa hauteur CE. Pour le démontrer, je fais BH = CE.

1°. Il eſt impoſſible que le poids A monte du point B au point H, ſans qu'il m'ait paſſé par les mains une quantité de cordes égale à la ligne CE. Donc dans ce tems-là la vîteſſe de la puiſſance eſt repréſentée par CE. Pour la vîteſſe du poids, elle eſt repréſentée par GH, parce que le poids A, en parcourant BH, ne s'approche de la hauteur à laquelle on veut l'élever, que de la quantité GH. Donc la vîteſſe de la puiſſance : à celle du poids : : CE : GH.

2°. A cauſe des triangles ſemblables BGH & BEC, l'on a CE : GH : : BC : BH ou CE ; donc la vîteſſe

de la puiſſance : à celle du poids :: BC : CE, ou comme la longueur BC du plan BEC eſt à ſa hauteur CE.

3°. En prenant BC pour ſinus total, CE devient le ſinus de l'angle de l'inclinaiſon du plan BEC ; donc la vîteſſe de la puiſſance : à celle du poids :: le ſinus total : au ſinus de l'angle de l'inclinaiſon du plan.

4°. La force de la puiſſance, de même que celle du poids, ont chacune pour meſure le produit de la maſſe par la vîteſſe ; donc, en cas d'équilibre, la maſſe du poids doit autant l'emporter ſur la maſſe de la puiſſance, que la vîteſſe de celle-ci l'emporte ſur la vîteſſe de celui-là : donc la puiſſance qui retient un poids en équilibre ſur un plan incliné, eſt à ce poids, comme le ſinus de l'angle de l'inclinaiſon du plan eſt au ſinus total, ou comme la hauteur CE du plan incliné BEC eſt à ſa longueur BC.

Je conviens, Monſieur, que cette démonſtration n'eſt exactement vraie, que lorſque la direction ſuivant laquelle la puiſſance ſoutient le poids eſt parallele au plan incliné ; M. l'Abbé de la Caille l'a très bien démontré à l'article 263 ; il a encore démontré, à l'article 264, que lorſque la direction de la puiſſance eſt parallele à l'horiſon, la puiſſance : au poids :: la hauteur CE du plan incliné BEC : à ſa baſe BE ; & voilà pourquoi je regarde comme un chef-d'œuvre la démonſtration de l'article 262. Comme elle eſt générale, elle renferme tous les cas poſſibles, c'eſt-à-dire, toutes les directions ſuivant leſquelles une puiſſance quelconque peut être appliquée à un poids quelconque. Je vous prie de la relire avec attention, après vous être bien convaincu que le triangle rectangle KAG eſt ſemblable au triangle rectangle DCK de la figure 32 de la planche 3. En effet l'angle KAG de l'inclinaiſon du plan BFA eſt évidemment égal à l'angle IC*p*, puiſque par hypotheſe IC eſt parallele à AB, & C*p* à AF. Mais l'angle IC*p* eſt évidemment égal à l'angle DCK, puiſque l'un & l'autre ajoutés à l'angle DCH valent chacun un angle droit ; donc l'an-

gle DCK eſt évidemment égal à l'angle KAG; donc le triangle rectangle KAG eſt ſemblable au triangle rectangle DCK; & voilà ce qui vous ſuffira pour comprendre ſans peine l'article 262, ſur-tout ſi vous avez préſent à l'eſprit l'article 213.

Pour l'intelligence de l'article 263, vous vous rappellerez que lorſque la puiſſance ſoutient le poids ſuivant la direction parallele IC, alors l'angle ICp devient zero, ou infiniment petit, & que ſon complément étant un angle droit, le ſinus de ce complément devient par-là même le ſinus total.

Les articles 264 & 265 ne doivent rien vous coûter à ſaiſir.

Il en eſt de même de l'article 266. Plus la direction de la puiſſance eſt oblique par rapport au plan incliné, plus petit eſt l'angle complément de cette inclinaiſon.

Enfin l'article 267 contient la vérité la plus inconteſtable. Plus l'inclinaiſon du plan diminue, c'eſt-à-dire, plus l'angle de l'inclinaiſon du plan eſt aigu, plus la puiſſance a de facilité à élever le poids, parce que plus un plan eſt incliné, plus ſa longueur l'emporte ſur ſa hauteur.

Voilà, Monſieur, tout ce que nous avons à dire pour le préſent ſur la nature du plan incliné: nous reprendrons dans la ſuite cette matiere, & nous nous ferons un devoir de marcher ſur les traces de M. l'Abbé de la Caille. Je ſuis, &c.

LETTRE DIXIEME.

Néceſſité d'un Commentaire pour l'article 273.

C'Eſt plutôt un billet, qu'une lettre que vous recevrez aujourd'hui de moi, Monſieur; je ſais que vous avez l'Analyſe démontrée du P. Reynau; je vous prie de m'envoyer ce qu'il a écrit ſur la *Chaînette*, & de l'accompa-

gner d'un commentaire de votre part, ſi cela vous paroît néceſſaire; M. l'Abbé de la Caille nous renvoie à cet Auteur, après avoir dit ſur les poids ſoutenus par des cordes des choſes qui ſont à la portée de quiconque a préſent à l'eſprit l'article 213 de ſa Mécanique. Cet article contient la démonſtration des articles 270 & 271. J'attends avec impatience votre réponſe; ce ne ſera qu'après l'avoir lue, que je commencerai l'étude des machines compoſées. J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE.

Principes néceſſaires pour l'intelligence de la Chaînette. Penſées du P. Reynau ſur cette courbe. Méthode pour la rectifier.

CE que le P. Reynau a écrit ſur la *Chaînette*, Monſieur, n'auroit beſoin d'aucun éclairciſſement, pour vous ſur-tout qui avez très bien étudié le traité des Sections coniques de l'Abbé de la Caille, & ce que cet Auteur a donné ſur les calculs différentiel & intégral à la fin de ſes éléments de Géométrie & d'Algebre dont je vous ai déja envoyé le commentaire. Cependant pour ne pas vous mettre dans la néceſſité de relire des démonſtrations qui vous détourneroient de l'étude de la Mécanique, je vous conſeille de regarder comme autant de principes inconteſtables les vérités ſuivantes.

1°. L'hyperbole n S M *Fig. 14 Pl. 6*, eſt une courbe dans laquelle le quarré d'une ordonnée quelconque P M eſt au rectangle fait ſur les abſciſſes correſpondantes S P, s P, comme le parametre n N eſt à l'axe principal S s. Ainſi en nommant S s, $2a$; P M, y; n N, p; C P, x; parce qu'on compte les abſciſſes depuis le centre C, l'on aura S P $= x - a$, & s P $= x + a$. La proportion précédente exprimée algébriquement ſera donc $yy : xx - aa :: p : 2a$; donc $2ayy = pxx - aap$; donc

$\frac{2ayy}{p} = xx - aa$; & c'eſt-là l'équation à l'hyperbole conſidérée en général.

2°. L'hyperbole équilatere eſt une eſpece d'hyperbole dans laquelle l'axe principal Ss, ſon axe conjugué Ll & le parametre Nn ſont trois quantités égales, & dans laquelle par conſéquent $2a = p$; donc l'équation générale à l'hyperbole devient pour l'hyperbole équilatere $yy = xx - aa$ & $y = \sqrt{xx - aa}$. Cette courbe a encore cela de particulier que les deux aſſymptotes Rr & Vu forment un angle droit à leur point d'interſection C.

3°. La différentielle de $\sqrt{uu+aa}$ eſt $\frac{2udu}{2\sqrt{uu+aa}} = \frac{udu}{\sqrt{uu+aa}}$; donc l'intégrale de $\frac{udu}{\sqrt{uu+aa}}$ eſt évidemment $\sqrt{uu+aa}$.

4°. Rectifier une courbe, c'eſt trouver une ligne droite égale à une ligne courbe.

5°. En nommant dans la courbe BAC, *Fig. 15 Pl. 6*, BA, u; en nommant encore x chaque coupée priſe ſur l'axe AD, & y chaque ordonnée correſpondante, l'on aura $Bb = du$, $eb = dx$, & $eB = dy$; l'on aura auſſi $du^2 = dx^2 + dy^2$ à cauſe du triangle Beb rectangle en e, & par conſéquent $du = \sqrt{dx^2+dy^2}$. Voilà, Monſieur, les principes qu'il faut avoir préſents à l'eſprit, pour comprendre ſans peine ce qu'a écrit le P. Reynau ſur la *Chaînette* dans ſon Analyſe démontrée, tom. 2, *pag.* 389 & ſuivantes. Je vais, puiſque vous le ſouhaitez, vous en envoyer la copie.

[BAC *eſt une chaîne très flexible & incapable d'extenſion, compoſée par exemple de très petits anneaux égaux, ou de globules égaux, attachée par les deux bouts en* B & C, *qui ſont dans la même horizontale* BC; *il faut trouver la courbe* BAC *formée par cette chaîne ſuſpendue librement, fig. 15 pl. 6.*

Il eſt évident 1°. qu'à cauſe de la parfaite uniformité qu'on ſuppoſe dans la chaîne, elle doit ſe diſpoſer par ſa

peſanteur & ſa flexibilité, de telle ſorte qu'en menant par le point A, qu'on ſuppoſe le plus bas, la verticale AD, la figure BAC ſoit partagée par la moitié par AD, & que les deux moitiés de cette courbe BA & CA ſoient égales & uniformes; de façon que prenant AD pour l'axe & A pour l'origine, les ordonnées DB, DC, à un même point D de l'axe, ſoient égales.

2°. Que la partie de la courbe au ſommet A, qu'on conçoit infiniment petite, eſt parallele à l'horizon; & qu'ainſi la tangente A *g* au ſommet eſt horizontale.

3°. Que ſi dans la ſituation où s'eſt miſe la chaîne ſuſpendue en B & C, (la ſuppoſant ſur un plan vertical) on l'attachoit à ce plan au ſommet A, elle ne changeroit point de figure; de maniere qu'en concevant l'une des moitiés, comme AC, retranchée, celle qui reſteroit, comme BA, conſerveroit la même figure qu'elle avoit; d'où il ſuit qu'on peut concevoir au ſommet A la force qu'on nommera *a*, qui retire chaque moitié BA, CA de la ſituation verticale ou de la perpendiculaire à l'horizon B*g*, ou CK, où elle ſe diſpoſeroit par ſa peſanteur, ſi elle n'étoit attachée que par l'un de ſes bouts B ou C, pour lui faire prendre la figure courbe BA ou CA.

4°. Que chaque point de la chaîne eſt tiré verticalement en bas par la peſanteur de la partie de la chaîne qui eſt depuis ce point là juſqu'au point le plus bas A. Ainſi le point B eſt tiré en bas verticalement par le poids de la moitié de la chaîne BA; chaque point, pris entre B & A, eſt tiré de même par le poids de l'arc de la chaîne qui eſt depuis ce point là juſqu'au point A. On peut prendre, à cauſe de l'uniformité de la chaîne, chacun des arcs de la chaîne, qu'on nommera *u* pour la peſanteur de ce même arc. D'où l'on voit que chaque petite partie de la chaîne eſt tirée verticalement par l'effort du poids *u*, & en même-tems horizontalement par la force *a* du ſommet A; ce qui lui fait prendre la ſituation de la tangente de ce point ou de cette petite partie de la courbe. Ainſi

5°. En concevant par chaque point de la chaîne (on prendra ici pour exemple le point B) une verticale Bg. juſqu'à la tangente horizontale Ag du ſommet A, la tangente BM de la chaîne à ce point B, & par g la parallele gN à la tangente BM, le point B eſt pouſſé verticalement ſuivant la direction Bg par le poids de la moitié de la chaîne, & retiré en même-tems horizontalement ſuivant la direction horizontale gA, ou une parallele à gA au point B, par une force conſtante qui eſt la même pour chaque point, & qu'on conçoit au ſommet A tirant ſuivant gA; ce qui eſt cauſe que la partie infiniment petite Bb eſt miſe par ces deux efforts dans la direction de la tangente BbM qui eſt le prolongement de la petite partie Bb. Or en menant la verticale ebm infiniment proche de Bng, l'on aura le petit triangle Bbe, rectangle en e, ſemblable au triangle BgM rectangle en g, & l'on aura pour chaque point comme B cette proportion, (en ſuppoſant que Bg repréſente l'effort u de la chaîne BA ſuivant la verticale, & gM l'effort de la force conſtante a qu'on conçoit au ſommet A) Mg : Bg :: Be : eb :: a : u.

Ainſi nommant x chaque coupée priſe ſur l'axe AD ou ſur les paralleles à l'axe comme Bg, & y chaque ordonnée BD; Be ſera dy & eb ſera dx, & la proportion précédente s'exprimera de cette maniere; Be (dy) : eb (dx) :: a : u; d'où l'on aura $a\,dx = u\,dy$, ou $dy = \frac{a\,dx}{u}$ pour l'équation de la courbe BA ou CA formée par la Chaînette.

Corollaire. Comme $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ = (en mettant au lieu de dy^2 ſa valeur $\frac{aa\,dx^2}{uu}$ priſe de $dy = \frac{a\,dx}{u}$) $\sqrt{\frac{uu\,dx^2 + aa\,dx^2}{uu}} = \frac{dx}{u}\sqrt{uu+aa}$, qui donne $du^2 = \frac{dx^2}{uu} \times \overline{uu+aa}$, ou bien $uu\,du^2 = dx^2 \times \overline{uu+aa}$; on aura $u\,du = dx\sqrt{uu+aa}$; d'où l'on tire $dx =$

$\frac{udu}{\sqrt{uu+aa}}$; en prenant les intégrales, l'on aura $x = \sqrt{uu+aa}$, & $xx = uu + aa$, & $uu = xx - aa$, ou bien $u = \sqrt{xx-aa}$ (qui fait voir que la longueur d'un arc quelconque u de la courbe B A formée par la chaîne, eſt égale à l'ordonnée d'une hyperbole équilatere dont a eſt le demi-axe & x la coupée). Enfin en mettant cette valeur de u dans $dy = \frac{adx}{u}$, on aura $dy = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$ pour l'équation de la courbe formée par la Chaînette.]

Voilà, Monſieur, ce que dit le P. Reynau ſur la nature de la courbe formée par la chaîne B A C. Il me paroît qu'il ne ſeroit pas impoſſible de dire les mêmes choſes en moins de mots & d'une maniere beaucoup plus claire que lui. Pour ce qui regarde la conſtruction de l'hyperbole équilatere A F, *Fig. 16 Pl. 6*, étant donné le demi-axe principal A E = A g, *Fig. 15 Pl. 6*, vous la trouverez, ſi vous vous rappellez que cette eſpece d'hyperbole ne peut pas avoir pour équation $yy = xx - aa$, ſans avoir la proportion ſuivante $x - a : y :: y : x + a$, c'eſt-à-dire, que dans l'hyperbole équilatere l'ordonnée eſt toujours moyenne proportionnelle entre ſes abſciſſes correſpondantes.

Soit donc donné l'axe principal A E a, *Fig. 16 Pl. 6*, ſur lequel il faille conſtruire une hyperbole équilatere dont le ſommet ſoit A & le centre E. Pour réſoudre ce problême, je prolonge indéfiniment l'axe principal a E A du côté de D. Je nomme a E A, $2a$; E D, x; D C, y; j'aurai donc par-là même E A = E a = a, A D = E D − E A = $x - a$, & a D = aE + E D = $x + a$. Je fais enſuite D C moyenne proportionnelle entre A D, a D. Je fais encore dc moyenne proportionnelle entre ſes abſciſſes correſpondantes A d, ad. J'éleve enfin ſur A D autant d'ordonnées que je voudrai, qui ſoient moyennes proportionnelles entre leurs abſciſſes correſpondantes; la

courbe A F qui passe par le sommet A, & par toutes les extrêmités des ordonnées D C, *dc* &c. sera évidemment un arc d'hyperbole équilatere, puisqu'à chaque point C l'on aura $DC^2 = AD \times aD$, ou $yy = xx - aa$. Cette méthode me paroît plus simple, que toutes celles qu'on a coutume de donner pour la construction de semblables courbes.

De ce que je viens de vous dire, il suit évidemment, Monsieur, que l'arc A C de la Chaînette B A C, *Fig.* 15 *Pl.* 6, est égal à l'ordonnée D C de l'arc hyperbolique A F. *Fig.* 16 *Pl.* 6. Je finirai cette lettre en vous faisant remarquer qu'on peut par le moyen du compas de proportion tirer très facilement une moyenne proportionnelle à deux lignes données, par exemple, à la ligne *a* de 20 & à la ligne *d* de 45 parties égales. Pour en venir à bout, ouvrez 1°. le compas ordinaire à la distance de 45 parties égales, ou de la ligne *d*, & transportez les deux pointes de ce compas ainsi ouvert sur le double nombre 45 de la double ligne des plans du compas de proportion.

2° Le compas de proportion demeurant ainsi ouvert, prenez avec le compas ordinaire la distance qui se trouve entre le double nombre 20 de la double ligne des plans; cette distance vous donnera la longueur de la moyenne proportionnelle que vous cherchez. En effet elle vous donnera une ligne de 30 parties égales. Or 20 : 30 :: 30 : 45. Je ne vous envoie pas la démonstration de cette méthode; vous la trouverez à l'article *Compas de proportion*, dans l'édition de mon petit Dictionnaire de Physique en 2 vol. in-8°. que j'ai eu l'honneur de vous envoyer comme une preuve de l'attachement sincere avec lequel je suis, &c.

LETTRE ONZIEME.

Inſuffiſance de ce qu'a écrit M. l'Abbé de la Caille ſur le coin.

J'Ai paſſé depuis quelques jours, Monſieur, à l'étude de ce que l'Abbé de la Caille nous a donné ſur les machines compoſées, & je vous avouerai avec la franchiſe que vous me connoiſſez, que je m'attendois à quelque choſe de plus de la part de cet Auteur. Et d'abord je n'examinerai pas ici s'il a eu droit de ranger le *coin* dans la claſſe des machines compoſées : je n'en connois gueres de plus ſimple que celle-là ; cet arrangement cependant n'en ſeroit que meilleur, s'il contribuoit à éclaircir la matiere. Mais il n'en eſt pas ainſi. Rien ne m'a arrêté dans la lecture des cinq articles qui regardent le coin, & je n'en ſuis gueres plus avancé qu'auparavant, c'eſt-à-dire, que je ſerois fort embarraſſé ſi quelqu'un me prioit de lui dire de combien préciſément, par le moyen de cette machine, la vîteſſe de la puiſſance l'emporte ſur celle du poids ou de la réſiſtance. Je vous prie de m'envoyer une démonſtration qui me mette à même de ſatisfaire à une pareille demande, ſi jamais on me la faiſoit. J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE.

Supplément à ce qu'a écrit l'Abbé de la Caille ſur le coin & ſur la force de percuſſion.

JE n'aurai pas grand peine, Monſieur, à répondre à la demande que vous me faites dans votre lettre. Jettez les yeux ſur la figure 37 de la planche 3, & vous verrez que tandis que les parties du bois H ſe ſont écartées de

de la longueur de la baſe A B du coin A D B, ce coin aura fait dans ce même bois un chemin repréſenté par la hauteur P D ; donc en général la vîteſſe de la puiſſance qui ſe ſert du coin, l'emporte autant ſur la vîteſſe de la réſiſtance ou des parties qu'il faut diviſer, que la hauteur du coin, l'emporte ſur ſa baſe.

Il ſuit de-là que plus un coin eſt aigu, c'eſt-à-dire, que plus l'angle A D B eſt aigu, plus il augmente la vîteſſe de la puiſſance ſur celle de la réſiſtance, parce qu'un coin aigu a beaucoup de hauteur & peu de baſe.

Il ſuit encore que cette machine doit être comptée, non pas parmi les machines compoſées, mais parmi les leviers de la ſeconde eſpece. Car en mettant avec M. de la Caille le point d'appui en Q, (je l'aimerois mieux en D, parce que c'eſt ſur ce point qu'appuye le tranchant du coin A D B) les parties qu'il faut ſéparer & qui tiennent ici lieu de poids, ſe trouvent entre le point d'appui & la puiſſance qui frappe ſur la baſe A B.

Sans doute qu'avant que de paſſer aux rouages, vous lirez les articles 282 & 283 qui contiennent une remarque intéreſſante ſur la force de percuſſion. L'article 283 vous paroîtra très difficile, ſi vous n'avez pas préſente à l'eſprit la réponſe que je vous ai faite à votre troiſieme lettre. Rappellez-vous donc que deux corps à maſſes égales ne peuvent avoir égale force à l'inſtant de la percuſſion, qu'autant qu'à cet inſtant ils ont égale vîteſſe.

Or deux corps égaux qui ſe meuvent pendant un certain tems, par exemple, pendant 3 inſtants, l'un d'un mouvement uniforme, l'autre d'un mouvement uniformément accéléré, ne peuvent avoir au troiſieme inſtant, c'eſt-à-dire, à l'inſtant de la percuſſion, la même vîteſſe, qu'autant que le premier a parcouru pendant ces trois inſtants un eſpace double de celui que le ſecond a parcouru, comme je vous l'ai déja démontré en ſon lieu. J'ai l'honneur d'être, &c.

LETTRE DOUZIEME.

Néceſſité d'une figure pour bien comprendre le mécaniſme des rouages.

CE ne ſera encore qu'un billet que vous recevrez aujourd'hui de ma part, Monſieur. J'ai aſſez bien compris tout ce qui regarde les roues dentées; je voudrois vous prier d'appliquer toute cette théorie à un rouage dont vous m'enverriez la figure exactement deſſinée. Je ſais que vous entendez très bien le deſſein; & vous ſavez que je n'en ai pas même les premiers éléments. Je compte que vous ne refuſerez pas cette grace à celui qui ſera toute ſa vie avec autant de reſpect, que de reconnoiſſance, &c.

RÉPONSE.

Commentaire des articles 285, 286, 287, 288, 290, 298.

PArmi les planches que je vous envoie, vous trouverez, Monſieur, la figure que vous demandez; c'eſt la 17e. de la planche 6. En voici l'explication la plus détaillée.

Le rouage dont il s'agit contient 3 roues, 2 pignons & un cylindre. La premiere roue B (on pourroit mettre à ſa place une ſimple manivelle) n'eſt pas dentée; elle a 10 pouces de rayon, & elle porte à ſon centre un pignon d'un pouce de rayon; ce pignon n'a que 10 dents, & il engrene la roue dentée D qui en a 100. La roue D a 10 pouces de rayon; elle porte à ſon centre E un pignon parfaitement égal au pignon de la roue B, & ce pignon engrene la roue F qui a 100 dents & 10 pouces de rayon, comme la roue D. La roue F porte à ſon centre le cylindre G d'un pouce de rayon, autour duquel

s'entortille la corde à l'extrêmité de laquelle eſt attaché le poids H.

Suppoſons maintenant que les dents des pignons entrent exactement dans les dents des roues ; qu'arrivera-t'il à la puiſſance A qui met ce rouage en mouvement ? Tandis que la roue B à laquelle la puiſſance A eſt appliquée, fera 10 tours, la roue D n'en fera qu'un, parce que la roue B porte à ſon centre un pignon qui n'a que 10 dents, & qui engrene exactement dans une roue qui en a 100. Par la même raiſon la roue F & le cylindre G ne feront qu'un tour tandis que la roue D & ſon pignon E en feront 10. Donc la roue B & ſon pignon C feront 100 tours, lorſque la roue F & le cylindre G n'en feront qu'un. Donc la vîteſſe de la puiſſance A : à celle de H :: 1000 : 1 ; car chaque tour de la roue B eſt 10 fois plus grand que chacun des tours du cylindre G. Mais le produit des rayons des roues B, D, F eſt au produit des rayons des pignons C, E & du rayon du cylindre G, comme 1000 eſt à 1 ; donc dans un rouage quelconque, (abſtraction faite des frottemens), la vîteſſe de la puiſſance appliquée à la manivelle d'un rouage, eſt à la vîteſſe du poids attiré par la corde, comme le produit des rayons de chaque roue dentée & de la manivelle eſt au produit des rayons de chaque pignon, & du cylindre ou tambour. Mais les forces ſont toujours comme le produit des maſſes par les vîteſſes ; & deux forces en équilibre ont leurs maſſes en raiſon inverſe de leurs vîteſſes ; donc, en cas d'équilibre, la maſſe de la puiſſance appliquée à la manivelle d'un rouage, eſt à la maſſe du poids attiré par la corde, comme le produit des rayons de chaque pignon & du tambour, eſt au produit des rayons de chaque roue dentée & de la manivelle ; & c'eſt-là la propoſition énoncée à l'article 285.

L'article 286 n'a beſoin d'aucune explication. Il eſt évident que plus il y aura de roues, plus l'effet ſera grand, toutes choſes égales d'ailleurs. Ajoutez au rouage dont je vous ai fait la deſcription au commencement de cette

lettre, une roue de 100 dents qui engrene un pignon de 10 dents, la vîteſſe de la puiſſance A ſera dix mille fois plus grande que celle du poids H. Vous avez à l'article 287 un calcul qui vous mettra ſous les yeux la même vérité de la maniere du monde la plus démonſtrative.

Jettez encore un coup d'œil ſur le rouage repréſenté par la figure que je vous envoie, vous verrez qu'il s'accorde exactement avec l'article 288. La roue B qui ſert de manivelle, fait dix tours, tandis que la roue D n'en fait qu'un; donc le nombre des tours de la roue B, eſt au nombre des tours de la roue D, comme le nombre des dents de la roue D, eſt au nombre des dents du pignon que la roue B porte à ſon centre; donc en général le nombre des tours d'une roue quelconque A, eſt au nombre des tours de la roue B à qui elle donne le mouvement, comme le nombre des dents de la roue B, eſt au nombre des dents du pignon de la roue A.

De plus, la roue B qui ſert de manivelle, fait 100 tours, tandis que le cylindre G n'en fait que 1; donc le nombre des tours de la roue B, eſt au nombre des tours du cylindre G, comme le produit des dents des roues D, F = 10000, eſt au produit des dents des pignons C, E = 100; donc en général le nombre des tours de manivelle, eſt à celui des tours du tambour ou cylindre, comme le produit du nombre des dents de chaque roue, eſt au produit du nombre des dents de chaque pignon; c'eſt-là le commentaire de l'article 290, car l'article 289 n'en a beſoin d'aucun.

L'article 298 en a encore moins beſoin. Il ne ſuppoſe pour être compris que ces deux vérités évidentes : *deux forces en équilibre ont leurs maſſes en raiſon inverſe de leurs vîteſſes. Deux corps qui parcourent différents eſpaces en tems égaux, ont leurs vîteſſes comme les eſpaces parcourus.*

Je ne vous dirai rien des 7 articles précédents. Ils regardent l'horlogerie de laquelle vous êtes plus au fait que moi. Ils ne contiennent cependant rien qui ne ſoit à la portée de tout le monde. J'ai l'honneur d'être, &c.

LETTRE TREIZIEME.

Commentaire de l'article 302. Néceſſité d'un commentaire pour l'intelligence de la vis ſans fin.

JE n'ai pas été content, Monſieur, de la démonſtration que donne l'Abbé de la Caille à l'article 302. Il me paroît qu'on peut expliquer le mécaniſme de la vis & de ſon écrou d'une maniere beaucoup plus ſimple, & par-là même infiniment plus claire. Suppoſons donc une puiſſance appliquée au point C, *Fig. 18 Pl. 6.* Tandis que cette puiſſance décrira le cercle qui a pour rayon CA, l'écrou DE & par conſéquent le corps qu'on veut preſſer, & dont le volume occupe l'eſpace DBE, ne deſcendra que de M en N; donc la vîteſſe de la puiſſance qui ſe ſert de la vis AB, eſt à la vîteſſe du poids, par exemple, des raiſins dont on veut exprimer le jus; comme la circonférence du cercle qui a CA pour rayon, eſt à la diſtance MN qui repréſente la diſtance qui ſe trouve entre les différents pas de la vis AB. Mais dans toute machine la puiſſance & le poids ont, en cas d'équilibre, leurs maſſes en raiſon inverſe de leurs vîteſſes; donc la puiſſance appliquée au levier CA, eſt à la force avec laquelle la vis AB ou ſon écrou DE font leur effet, comme un pas de la vis AB = MN, eſt à la circonférence du cercle décrit par le levier CA; & c'eſt-là préciſément la propoſition énoncée à l'article 302. Les articles 303 & 304 n'ont pas beſoin d'explication. Les articles 305, 306 & ſuivants, qui regardent la vis ſans fin, auroient beſoin d'une figure; je vous prie de me l'envoyer deſſinée de votre main. J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE.

Explication de la vis ſans fin, & remarques ſur les articles 306, 307 & 309.

LA vis ſans fin, repréſentée par la figure 19 de la planche 6, eſt compoſée, Monſieur, d'un cylindre B C. cannelé en ligne ſpirale, qu'une main M appliquée à la manivelle M B fait tourner horizontalement ſur des pivots. Les filets de la gorge que l'on a creuſés autour de ce cylindre, engrenent exactement les dents de la roue R; & cette roue en tournant, fait tourner un tambour ou cylindre A, auquel eſt attachée la corde S P, de laquelle pend le poids P qu'on prétend élever. Pour comprendre le jeu de cette machine, donnons 60 dents à la roue R, & ſuppoſons que la puiſſance appliquée en M décrive une circonférence de 12 pouces, tandis que le tambour A en décrit une de 6. Il arrivera néceſſairement que le tambour A ne fera qu'un tour, tandis que la puiſſance M en fera 60, puiſqu'à chaque circonférence décrite par la puiſſance M, il ne s'engrene qu'une nouvelle dent de la roue R dans les *filets* du cylindre cannelé B C. Mais chaque circonférence décrite par la puiſſance M eſt par hypotheſe double de la circonférence décrite par le tambour A. Donc, à l'aide de la vis ſans fin B C A, la vîteſſe de la puiſſance M : à la vîteſſe du poids P :: 120 : 1. Mais 120 : 1 :: 12 × 60 = 720 : 6; donc en général à l'aide d'une vis ſans fin quelconque, abſtraction faite des frottemens, la vîteſſe de la puiſſance : à la vîteſſe du poids : : le produit de la circonférence de la roue dentée & de celle que décrit la puiſſance : à la circonférence décrite par le tambour. Mais les forces égales ont leur vîteſſe en raiſon inverſe de leur maſſe; donc en cas d'équilibre la maſſe de la puiſſance appliquée à la vis ſans fin : à la maſſe du poids qu'on veut élever par cette machine : : la circonférence décrite par le tambour

: au produit de la circonférence de la roue dentée & de celle que décrit la puiſſance.

Cette proportion, Monſieur, donne le même réſultat que celle de l'article 306. En effet donnons un pouce de diſtance à chaque pas de vis du cylindre BC; la circonférence de la roue R en aura 60, ſon rayon à-peu-près 10, & le rayon du tambour A à-peu-près 1. Par la proportion de l'article 306, l'on aura, la maſſe de la puiſſance M : à la maſſe du poids P :: 1 × 1 : 12 × 10 :: 1 : 120. Mais c'eſt-là le réſultat qu'a donné la proportion dont je me ſuis ſervi; donc &c. Je vous conſeille cependant de préférer la proportion de l'Abbé de la Caille à la mienne, parce qu'elle fait mention expreſſe de la diſtance des pas de vis, à laquelle dans le fond il eſt très néceſſaire d'avoir égard.

Quelque compliquée que paroiſſe la machine dont il eſt parlé à l'article 307, vous devez en comprendre, Monſieur, le mécaniſme à la premiere lecture; elle ne contient que des roues dentées & des vis ſans fin. L'Analogie compoſée qu'on indique à la fin de cet article, eſt celle-ci.

La puiſſance *p* multipliée 1°. par l'effet du pignon *a* ſur la vis O, 2°. par l'effort de la vis O ſur la roue B, 3°. par l'effet du pignon *b* ſur la vis Q, 4°. par l'effet de la roue C ſur ſon tambour,

Eſt au poids P multiplié 1°. par l'effet du pignon *a* ſur la vis O, 2°. par l'effet de la vis O ſur la roue B, 3°. par l'effort de la roue B ſur le pignon *b*, 4°. par l'effort de la vis Q ſur la roue C;

Comme le pas de la vis *m* multiplié 1°. par le rayon du pignon *a*, 2°. par le rayon de la vis O à l'endroit où elle eſt engrenée dans la roue B, 3°. par le rayon du pignon *b*, 4°. par le rayon de la vis Q à l'endroit où elle eſt engrenée dans la roue C, 5°. par le rayon du tambour,

Eſt à la circonférence de la manivelle multipliée 1°. par le rayon de la roue A, 2°. par le rayon de la vis O à l'endroit où elle eſt engrenée dans le pignon *a*, 3°. par le

rayon de la roue B, 4°. par le rayon de la vis Q à l'endroit où elle eſt engrenée dans le pignon *b*, 5°. par le rayon de la roue C.

Mais l'effet du pignon *b* ſur la vis Q n'eſt pas différent de l'effort de la roue B ſur le pignon *b* ; il en eſt de même de l'effet de la vis Q ſur la roue C, il n'eſt pas différent de celui de la roue C ſur ſon tambour ; donc les deux premiers termes, qui forment la premiere raiſon de la proportion précédente, ſont entr'eux, comme *p* eſt à P ; donc *p* eſt à P ſuivant la proportion énoncée au commencement de l'article 307.

Il n'eſt pas néceſſaire de vous avertir que dans cet article il s'eſt gliſſé une faute d'impreſſion à la ligne 23e. ; vous n'avez pas ſans doute manqué de remarquer qu'il falloit lire le pignon *a*, & non pas le pignon A.

Il y a encore à l'article 309 une omiſſion dont il eſt bon de vous prévenir. La proportion de la ligne 21e. doit être en ces termes. *p* : P :: 1×20×9×18×6×16 : 1056×96×14×90×8×85, ou *p* : P :: 311040 : 868589568oo. Mais ce ſont là des fautes d'inattention de la part de l'Auteur. J'ai l'honneur d'être, &c.

LETTRE QUATORZIEME.

Remarques ſur les poulies mouflées.

QUelque difficile que ſoit en lui-même ce qu'a écrit l'Abbé de la Caille ſur les poulies mouflées, je l'ai cependant compris à la premiere lecture. N'en ſoyez pas étonné, Monſieur ; j'avois préſent à l'eſprit ce que cet Auteur avoit dit auparavant ſur les poulies ſimples mobiles & immobiles, & le Commentaire que vous avez eu la bonté de m'en envoyer en ſon tems. Si l'on veut mettre la ſcholie de l'article 317 ſous la même forme que les articles précédents, il faudra dire, la puiſſance appliquée à l'extrêmité du cordon eſt au poids entraîné par la moufle

mobile, comme 1 eſt à la ſomme des coſinus de l'obliquité de chacun des cordons qui embraſſent les poulies mobiles à l'égard de la droite que le centre de chaque poulie mobile décrit dans ſon mouvement, diviſée par le rayon ou ſinus total. En effet nommons R le rayon ou ſinus total ; nommons S, *cof.* la ſomme des coſinus en queſtion, nous aurons $p : P :: R : S, cof.$; donc $P \times R = p \times S, cof.$; donc $\frac{P}{p} = \frac{S, cof.}{R}$; donc $p : P :: 1 : \frac{S, cof.}{R}$.

Je crois qu'il eſt tems, Monſieur, d'en venir aux cauſes qui ſont obſtacle à l'effet des machines ; j'entreprendrai volontiers cet examen, lorſque vous aurez eu la bonté de m'envoyer ce qu'a écrit ſur cette matiere M. Belidor dans l'introduction à ſon Architecture Hydraulique. L'Abbé de la Caille y renvoie ſon lecteur, & je ſais que vous avez cet ouvrage dans votre bibliotheque. J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE

Contenant le commentaire des articles 320, 322, 323, 324, 326, 327, 328, & 330.

JE me garderai bien, Monſieur, de vous communiquer ce qu'a écrit M. Belidor ſur les *frottements* au chapitre ſecond du livre 1 de ſon Architecture Hydraulique ; c'eſt-là peut-être ce qu'il y a de moins bon dans ce bel ouvrage. Il ne paroît pas que l'Abbé de la Caille en faſſe grand cas, puiſqu'il ſe contente de dire que les regles & les principes que M. Belidor a donnés ſur cette matiere, peuvent ſuffire dans la pratique, en attendant que cette partie de la Mécanique ait été perfectionnée. Tâchons de travailler à ce grand ouvrage, en ajoutant nos remarques à ce qu'a écrit l'Abbé de la Caille ſur les cauſes qui ſont obſtacle à l'effet des machines. Je ne crains pas d'avancer

qu'il n'eſt point dans ſa Mécanique de chapitre auſſi peu travaillé que celui-ci ; & je crois pouvoir me flatter que ce ſera ici la partie la mieux travaillée de mon Commentaire. Je ſerai un peu long ; mais c'eſt une matiere qui n'a pas encore été aſſez approfondie, & qui, de l'aveu de tous les Mécaniciens, demanderoit un traité entier. Venons au fait ſans autre préambule.

1°. Pour réſoudre le problême de l'article 320, il faut ſuppoſer un poids de 15 onces ſuſpendu au point F *Fig.* 20 *Pl.* 6 ; il faut enſuite chercher par l'article 240 le point d'appui d'un levier de 12 pouces, aux extrêmités duquel ſont ſuſpendus deux poids, l'un de 320, & l'autre de 15 onces ; vous trouverez le poids de 15 onces éloigné du point d'appui de 11,433 pouces.

2°. Cette premiere opération faite, vous ſuppoſerez un poids de 335 onces ſuſpendu au point d'appui trouvé, & vous chercherez le point d'appui d'un levier de 23,433 pouces, aux extrêmités duquel ſont ſuſpendus deux poids, l'un de 335, & l'autre de 160 onces ; vous trouverez le poids de 160 onces éloigné du point d'appui de 15,858 pouces.

Il ſuit de toutes ces opérations, Monſieur, que pour réſoudre le problême de l'article 320, il n'eſt pas néceſſaire de recourir à l'article 349 dont vous ſerez très mécontent ; il ſuffit d'avoir préſents à l'eſprit les principes énoncés à l'article 240 dont vous avez déja reçu le Commentaire. Voilà tout ce que dit l'Abbé de la Caille ſur la réſiſtance occaſionnée par le poids du levier ; il me paroît qu'il n'a pas épuiſé la matiere ; entrons dans un plus grand détail, j'ai tout lieu d'eſpérer qu'il méritera toute votre attention. La même figure nous ſervira pour tout levier de la premiere eſpece.

Dans le problême précédent M. l'Abbé de la Caille cherche le point d'appui d'un levier de la premiere eſpece dont il a la peſanteur, & dont il connoît les poids appliqués à ſes deux extrêmités ; mais il arrive très ſouvent que l'on donne le point d'appui & la peſanteur du levier,

avec un des deux poids applicable à l'une de ſes extrêmités, & que l'on demande l'autre poids qui doit tenir ce premier en équilibre. Ce problême mérite d'être réſolu dans toutes les formes. Suppoſons donc que le levier A B ait 6 pieds de long, 12 livres de maſſe, & que le poids *p* de 100 livres ſoit placé à 2 pieds du point d'appui D; l'on demande quel poids il faut appliquer à l'extrêmité A pour tenir en équilibre celui qui ſe trouve ſuſpendu à l'extrêmité B.

Pour réſoudre ce problême je fais la proportion ſuivante qui pourra ſervir de formule, ou de regle générale pour tout levier de la premiere eſpece.

La diſtance du poids donné au point d'appui, eſt à la diſtance du centre de gravité du levier au même point d'appui, comme la peſanteur du levier eſt à un quatrieme terme qui vous donnera la partie du poids donné que le centre de gravité du levier tiendra en équilibre. L'on dira donc dans le cas propoſé, 2 pieds de diſtance ſont à 1 pied de diſtance du point D, comme 12 livres ſont à 6 livres; c'eſt-à-dire, que dans le cas propoſé il y aura 6 liv. dans le poids d'un quintal qui ſeront ſoutenues par le centre de gravité du levier. Ce ſera donc à un poids de 94 livres, éloigné de 2 pieds du point d'appui, qu'il faudra chercher une puiſſance, ou un moindre poids éloigné du même point d'appui de 4 pieds, qui le tienne en équilibre. Le principe général de mécanique vous fournira, pour réſoudre ce problême, l'analogie ſuivante; *4 pieds, diſtance de la puiſſance ou du moindre poids au point d'appui : à 2 pieds, diſtance du plus grand poids au même point d'appui* :: 94 : 47; donc dans le cas propoſé il y aura équilibre entre un poids de 100, & un poids de 47 livres; bien entendu que le poids de 100 livres, éloigné de 2 pieds du point d'appui, eſt ſoutenu en même-tems, & par un poids de 47 livres éloigné de 4 pieds, & par un poids de 12 livres éloigné d'un pied du même point d'appui.

Remarquez cependant, Monſieur, que la proportion

en forme de formule dont je me ſuis ſervi dans cet exemple, ſuppoſe que le point d'appui ſe trouve entre le poids donné & le centre de gravité du levier; ce même problême peut être propoſé d'une maniere encore plus générale, en l'énonçant en ces termes : *la longueur, la peſanteur & le point d'appui d'un levier quelconque de la premiere eſpece étant donnés, déterminer le poids qu'il faut appliquer à l'extrêmité du bras le plus court, pour que ce levier ſoit en équilibre avec lui-même.*

Reprenons notre ancien levier AB de 6 pieds de long & de 12 livres de maſſe. Rappellons-nous que ſon point d'appui D eſt ſuppoſé à la fin du quatrieme pied, ou ce qui revient au même, rappellons-nous que le bras AD a 4 pieds, & le bras DB 2 pieds de longueur; je dis que pour le mettre en équilibre avec lui-même, il faudra attacher un poids de 6 livres à l'extrêmité du bras le plus court. En voici la démonſtration; c'eſt la même que la précédente, mais elle me paroît plus claire.

Puiſque le levier AB eſt ſuppoſé homogene & parfaitement égal dans ſa longueur de 6 pieds, le poids du 6e. & du 5e. pieds qui forment le bras le plus court DB, ſeront en équilibre avec le poids du quatrieme & du troiſieme pied qui forment une partie du bras le plus long AD; car ces 2 poids ſont de 4 livres chacun, & ils ſont à égale diſtance du point d'appui D. Il reſte encore le poids du ſecond & du premier pieds, c'eſt-à-dire, il reſte encore 4 livres qu'il faut mettre en équilibre avec un poids que l'on attachera à l'extrêmité du bras DB. Ces 4 livres réunies à leur centre de gravité C, ſe trouvent à 3 pieds du point d'appui D; donc, pour élider leur force, il en faudra mettre 6 à l'extrêmité du bras DB, parce que 6 livres à 2 pieds du point d'appui, & 4 livres à 3 pieds du même point d'appui, ont évidemment égale force.

Cette opération une fois faite, vous ſerez en droit de regarder le levier AB comme dénué de toute peſanteur; & tous les poids que vous ſuſpendrez à ſes deux extrêmités A & B ſeront en équilibre, lorſqu'ils auront leurs maſſes

en raiſon inverſe de leurs diſtances au point d'appui. Voilà pour ce qui regarde les leviers de la premiere eſpece ; il s'agit maintenant de trouver une regle générale qui nous ſerve de formule pour mettre le levier de la ſeconde eſpece en équilibre avec lui-même. Il n'eſt pas néceſſaire de vous rappeller que dans ce levier le poids ſe trouve toujours entre la puiſſance placée à une extrêmité & le point d'appui placé à l'autre extrêmité. Il eſt encore moins néceſſaire de vous prouver que la rame du batelier eſt un véritable levier de la ſeconde eſpece. Tout le monde voit que la main attachée à l'une des extrêmités de la rame, eſt la puiſſance ; le poids, c'eſt le bateau attaché au milieu ; & le point d'appui ſe trouve à l'autre extrêmité de la rame qui s'appuye contre l'eau qu'elle déplace.

L'on me donne donc une rame de 10 pieds de long, & de 30 livres de maſſe ; l'on m'avertit que ſon centre de gravité eſt à-peu-près au milieu, c'eſt-à-dire, l'on m'avertit que ſon centre de gravité eſt éloigné de 5 pieds du point d'appui ; l'on me demande quel effort doit faire le batelier pour élider la force d'un poids de 30 livres placé au centre de gravité de la rame, ou ce qui revient au même, l'on me demande quel effort doit faire une puiſſance éloignée du point d'appui de 10 pieds, pour ſoutenir un poids de 30 livres éloigné de 5 pieds du même point d'appui. Il eſt évident que le batelier élidera la peſanteur de la rame, en faiſant un effort capable de ſoutenir un poids de 15 livres, car *10 pieds, diſtance de la puiſſance au point d'appui : à 5 pieds, diſtance du centre de gravité de la rame au même point d'appui :: 30 livres, peſanteur de la rame : à 15 livres.*

La formule générale pour les leviers de la ſeconde eſpece ſera donc celle-ci ; *la longueur du levier : à la diſtance de ſon centre de gravité au point d'appui :: la peſanteur du levier : à un quatrieme terme* qui vous donnera l'effort que devra faire la puiſſance pour élider cette peſanteur. Cette analogie n'a pas beſoin de preuve ; elle eſt fondée, comme les précédentes, ſur le principe général de la Mécanique.

Je ne vous parlerai pas ici, Monſieur, du levier de la

troiſieme eſpece ; c'eſt plutôt une antimachine, qu'une véritable machine, puiſque avec cet inſtrument la puiſſance eſt toujours moins éloignée du point d'appui, que le poids qu'elle veut ſoutenir ou ſoulever. Voilà ce que j'ai cru devoir ajouter aux articles 319, 320 & 321, pour leur ſervir de commentaire ; l'article 322 a beſoin d'une addition encore plus conſidérable ; vous pouvez compter pour rien ce qu'a dit l'Abbé de la Caille dans cet article.

Cet Auteur nous avertit que lorſqu'on ſe ſert de la poulie, il faut avoir égard au poids des cordes, à leur roideur & au frottement que les différentes parties de cette machine exercent les unes ſur les autres. C'eſt-là dire des choſes que tout le monde ſait. Pour nous, nous prendrons une route bien différente ; & comme chaque poulie éprouve un frottement différent, nous croyons devoir commencer par réſoudre le problême ſuivant :

Etant donnée une poulie quelconque immobile, chargée de deux poids quelconques égaux ; trouver le frottement qu'elle éprouve dans la pratique ?

1°. L'on me donne la poulie CD, *Fig.* 1 *Pl.* 7 dont on me charge de calculer le frottement. Pour le trouver, je peſe d'abord la poulie elle-même, enſuite les cordes, enfin les deux poids égaux A, B. Suppoſons donc que la poulie peſe 10 livres, les cordes 5 livres, & le 2 poids 7 livres $\frac{1}{2}$ chacun. Cela ſuppoſé, voici comment je raiſonne : il eſt évident que pour peu que j'ajoute à l'un des deux poids, l'équilibre ne devroit pas ſubſiſter ; & ſi le contraire arrive, cela ne peut venir que du frottement qui ſe trouvera plus fort, que la quantité qu'on aura ajoutée à l'un des deux poids A, B.

J'examine quel eſt le poids ajouté qui a rompu l'équilibre ; & ſi c'eſt 2 livres, je dirai : ſi 30 livres cauſent un frottement de 2 livres, quel frottement cauſeront 10 livres ? ou, $30 : 2 :: 10 : \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, c'eſt-à-dire, que le frottement de la ſeule poulie CD ſera de $\frac{2}{3}$ de livre.

Le frottement des ſeules cordes ſera de $\frac{1}{3}$ de livre, parce que $30 : 2 :: 5 : \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Enfin le frottement cauſé par la

preſſion des deux poids A, B ſur l'axe de la poulie CD, ſera de 1 livre, parce que 30 : 2 :: 15 : 1.

Si le poids B étoit ſoutenu par une puiſſance P de 7 liv. $\frac{1}{2}$ dont la direction fût oblique à l'horizon, le frottement ne ſeroit pas auſſi conſidérable que dans le cas de la direction perpendiculaire. Pour le trouver, voici comment je raiſonne : la puiſſance ou la force P, repréſentée par la ligne PC, équivaut aux deux forces PR & CR. La force horizontale PR ne peſe pas ſur l'aiſſieu de la poulie ; cet aiſſieu n'eſt donc chargé que de la force CR ; c'eſt-à-dire, que la charge qu'exerce ſur l'aiſſieu de la poulie CD la puiſſance P dirigée perpendiculairement à l'horizon, eſt à la charge qu'elle exerce ſur le même aiſſieu, lorſque ſa direction eſt oblique ; comme PC, eſt à CR, ou comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle de l'inclinaiſon de la puiſſance à l'horizon. Si le ſinus de l'angle d'inclinaiſon n'eſt que la moitié du ſinus total, l'aiſſieu de la poulie CD, dans le cas de la direction oblique dont il s'agit, ſera chargé de 3 livres $\frac{1}{4}$ de moins. Il en ſera de même de la charge qu'exerce la corde PC ſur le même aiſſieu ; elle ſera relative à la grandeur du ſinus de l'angle de l'inclinaiſon de la puiſſance à l'horizon. Ainſi ſi la corde PC peſe 2 livres $\frac{1}{2}$, elle ne chargera dans le cas préſent l'aiſſieu que de 1 livre $\frac{1}{4}$. Enfin ſi la direction du poids B étoit oblique à l'horizon, on feroit par rapport à lui tout ce qu'on a fait par rapport à la puiſſance P, & l'on trouveroit par-là la charge qu'il exerceroit ſur l'aiſſieu de la poulie. Cela fait, on chercheroit comme dans le problême précédent les différents frottements occaſionnés par les différentes peſanteurs de la poulie, des cordes, de la puiſſance & du poids. Pour éclaircir toujours plus cette matiere, reprenons l'exemple précédent, & après avoir trouvé que 30 livres donnent un frottement de 2 livres dans le cas de la perpendicularité des directions de la puiſſance & du poids, cherchons quel ſera le frottement dans le cas que ces mêmes directions feront avec l'horizon un angle de 30 degrés ; car le ſinus de cet angle eſt préciſément la moitié du ſinus total.

Dans le cas des directions perpendiculaires, l'aiſſieu de la poulie CD eſt chargé d'un poids de 30 livres ; & dans le cas des directions qui ſont avec l'horizon un angle de 30 degrés, il n'eſt chargé que d'un poids de 20 livres ; je dirai donc, $30 : 2 :: 20 : 1\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, que dans le cas dont il s'agit, la totalité des frottemens ne ſera que de 1 livre $\frac{1}{3}$.

Le frottement de la ſeule poulie ſera, comme dans le premier exemple, de $\frac{2}{3}$ de livre, parce que $20 : 1\frac{1}{3} :: 10 : \frac{2}{3}$.

Le frottement des ſeules cordes ſera de $\frac{1}{6}$ de livre, car $20 : 1\frac{1}{3} :: 2\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$.

Pour le frottement de la puiſſance & du poids, il ſera de $\frac{1}{2}$ livre, parce que $20 : 1\frac{1}{3} :: 7\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$.

Vous comprenez, Monſieur, que ces mêmes principes vous conduiront à la ſolution du problême ſuivant : *étant donnée une balance quelconque, chargée de deux poids quelconques égaux, trouver le frottement qu'elle éprouve dans la pratique.* Ce qui nous reſte à faire maintenant, c'eſt de trouver le frottement qu'éprouve une poulie quelconque mobile, chargée d'un poids quelconque en équilibre avec une puiſſance quelconque.

Pour réſoudre ce problême, j'ajoute à la poulie mobile AB la poulie immobile PX, *Fig.* 2 *Pl.* 7 autour de laquelle je fais paſſer une corde APH. J'attache au point H un poids q qui ſoit préciſément la moitié du poids Q. Ce poids q, abſtraction faite des réſiſtances, devroit être en équilibre avec le poids Q (252). Il s'en faut bien cependant qu'il y ſoit. Je cherche donc cet équilibre, en ajoutant au poids q un certain nombre de petits poids ; & lorſque je m'apperçois que je l'ai trouvé, je cherche quelle eſt la peſanteur des petits poids ajoutés ; cette peſanteur me donnera évidemment la totalité des frottements que cette machine éprouvera dans la pratique. Les frottements particuliers qu'éprouvera chacune de ſes parties, ſe trouveront par des méthodes fondées ſur les analogies précédentes. Ces mêmes analogies, jointes à de pareilles expériences, vous

vous feront découvrir les frottements non-seulement des *Mouffles* qui ne ſont compoſées que de poulies immobiles & mobiles, mais encore de la plupart des machines uſuelles. Il ſuffit pour cela de ſavoir quels ſont les poids de différente groſſeur que la machine qu'on examine, devroit tenir en équilibre dans la théorie & abſtraction faite de toute eſpece de réſiſtance.

Tout ceci, quelqu'étendu qu'il ſoit en lui-même, ne peut pas cependant paſſer pour le commentaire complet de l'article 322; la fin de cet article demande que je vous parle de la réſiſtance des cordes. Je vais vous donner des regles qui pourront vous ſervir de principe, lorſque vous voudrez entreprendre le calcul de cette eſpece de réſiſtance. Avant que d'en faire l'énumération, je vous prie de remarquer, Monſieur, que les cordes que les ouvriers ſont obligés d'employer, ont une peſanteur toujours réelle, quelquefois énorme, témoins les cables des barques & des vaiſſeaux; qu'elles ont dans les machines ordinaires un diametre de pluſieurs lignes, & de pluſieurs pouces dans les grandes machines; qu'elles ont enfin, ſoit à raiſon de la matiere dont elles ſont compoſées, ſoit à raiſon des poids qu'elles ſoutiennent, une roideur qui n'approche que trop ſouvent de l'inflexibilité. Les cordes oppoſent donc dans la pratique trois eſpeces de réſiſtances, l'une vient de leur peſanteur, l'autre de leur diametre, & la troiſieme de leur roideur. Les regles ſuivantes ſont autant de moyens infaillibles de les évaluer avec la derniere exactitude.

Regle I. La réſiſtance des cordes eſt en raiſon directe de leur peſanteur. Vous en voyez la raiſon, Monſieur; tout poids réel appliqué à une machine, oppoſe une réſiſtance d'autant plus grande, qu'il eſt lui-même plus grand; mais la peſanteur des cordes eſt un poids réel appliqué à une machine; donc elle oppoſe une réſiſtance d'autant plus grande, qu'elle eſt elle-même plus conſidérable; donc la réſiſtance des cordes eſt d'abord en raiſon directe de leur peſanteur.

Ajoutez à cela qu'une corde plus peſante cauſe une plus grande preſſion, & qu'une plus grande preſſion occaſionne

un plus grand frottement ; & concluez de-là que dans la pratique les cordes légeres ſont préférables aux cordes peſantes, lorſque celles-là ſont capables de ſoutenir le poids que l'on veut tranſporter d'un lieu à un autre.

Regle II. La réſiſtance des cordes eſt en raiſon directe de leurs diametres. En voici, Monſieur, la raiſon phyſique. Dans la plupart des machines les cordes s'entortillent autour d'un cylindre dans l'axe duquel ſe trouve le point d'appui ; tel eſt, par exemple, le *Tour* dont je vous ai fait la deſcription dans ma neuvieme lettre. Ces cordes ainſi entortillées ne ſont plus qu'un *tout* avec le cylindre, dont elles augmentent très ſenſiblement le rayon. Cela ſuppoſé, voici comment je raiſonne. Plus le diametre d'une corde eſt conſidérable, plus elle augmente le rayon du cylindre autour duquel on eſt obligé de la rouler. Plus le rayon du cylindre eſt augmenté, plus le poids attaché à la corde ſe trouve éloigné du point d'appui. Plus le poids eſt éloigné du point d'appui, plus il acquiert de vîteſſe. Plus il acquiert de vîteſſe, plus il a de force. Plus il a de force, plus il eſt difficile de le remuer. Donc plus le diametre d'une corde eſt conſidérable, plus elle oppoſe de réſiſtance ; donc la réſiſtance des cordes eſt en raiſon directe de leurs diametres. Auſſi l'expérience nous apprend-elle que, tout le reſte étant égal, une corde de 2 lignes de diametre oppoſe une réſiſtance préciſément double de celle qu'oppoſe une corde de 1 ligne de diametre.

Regle III. La réſiſtance d'une corde eſt en raiſon directe de ſa roideur. Je viens de vous faire remarquer, Monſieur, que dans la plupart des machines les cordes s'entortilloient autour de quelque cylindre. Or plus une corde eſt roide, plus l'entortillement dont je vous ai parlé, eſt difficile. Donc plus une corde eſt roide, plus grande eſt la réſiſtance qu'elle oppoſe. Donc la réſiſtance d'une corde eſt en raiſon directe de ſa roideur. Auſſi a-t-on coutume de mouiller les cordes, lorſqu'on s'apperçoit qu'elles n'ont pas aſſez de flexibilité.

Regle IV. La roideur des cordes, toutes choſes égales

d'ailleurs, eſt en raiſon directe des poids qu'elles ſoutiennent. Suppoſons, Monſieur, deux cordes d'un égal diametre, faites de la même matiere. Suppoſons encore que la premiere ſoutienne un poids de 4, & la ſeconde un poids de 2 livres; je dis que la roideur de la premiere : à la roideur de la ſeconde : : 4 : 2. Je le démontre.

La roideur des cordes dépend de leur tenſion; mais la tenſion eſt toujours en raiſon directe des poids ſoutenus; donc la roideur des cordes eſt toujours en raiſon directe des poids qu'elles tiennent ſuſpendus. M. Amontons, membre de l'Académie royale des Sciences de Paris, a éprouvé (*Mémoires de cette Académie, ann. 1699, pag. 218*) que 45 onces ayant ſurmonté la réſiſtance occaſionnée par la roideur de deux cordes de 3 lignes chacune de diametre, chargées d'un poids de 20 livres, & tournées autour d'un cylindre de 6 lignes de diametre, il lui avoit fallu 90 onces pour ſurmonter cette même réſiſtance, lorſque les deux cordes étoient chargées d'un poids de 40 livres. Or 20 livres : 40 livres : : 45 onces : 90 onces. Donc la roideur des cordes, toutes choſes égales d'ailleurs, eſt en raiſon directe des poids qu'elles ſoutiennent.

Corollaire. La réſiſtance des cordes, totalement priſe, eſt en raiſon compoſée directe de leur peſanteur, de leur diametre & de leur roideur. C'eſt-à-dire, que ſi, *par exemple*, la peſanteur, le diametre & la roideur de la corde A eſt double de la peſanteur, du diametre & de la roideur de la corde B, la réſiſtance de la corde A : à la réſiſtance de la corde B : : $2\times2\times2=8$: $1\times1\times1=1$. Terminons ce Commentaire de l'article 322 par le catalogue des plus grands poids que puiſſent ſoutenir les cordes de chanvre de différent diametre; il a été conſtruit par M. Amontons.

Diametres	Poids	Diametres	Poids
1 ligne	100 livres	12 lignes	20000 livres
2	400	15	30000
3	900	18	40000
4	2000	21	50000
5	3000	23	60000
6	4000	25	70000
7	5000	27	80000
8	6000	29	90000
9	8000	30	100000
10	10000		

L'article 323 de la Mécanique de M. l'Abbé de la Caille eſt bien différent de celui qui le précéde ; il ne demande que deux mots de commentaire. Pour évaluer la réſiſtance que le *Tour* oppoſe dans la pratique, il faut ſe rappeller d'abord de combien cette machine augmente la vîteſſe de la puiſſance ſur celle du poids. Il faut ſe rappeller encore qu'un homme d'une force ordinaire, qui n'agit que par ſa force & non pas par ſon poids en ſe ſuſpendant, ne peut pas faire plus de 25 livres d'effort continuel ſur une machine en trois heures de tems. Cela étant ainſi, je ſuppoſe que, abſtraction faite des frottemens, deux hommes appliqués à un *Tour* qui procure à la puiſſance dix fois plus de vîteſſe qu'au poids, doivent remuer le poids A, & que dans la pratique il faille 3 hommes pour produire cet effet, j'aurai droit de conclure que les frottements de cette machine équivalent à 250 livres, parce que $10 \times 25 = 250$, & que ce troiſieme homme a une force égale à celle que donneroit le produit de 25 livres de maſſe & de 10 degrés de vîteſſe.

Pour le commentaire de l'article 324, il doit encore moins coûter que celui de l'article 323. Reliſez ma réponſe à votre neuvieme lettre, elle vous apprendra combien, abſtraction faite des frottements, il faut appliquer d'hommes au point P, *Fig.* 13 *Pl.* 6, pour faire monter le poids A du point B au point C. Voyez enſuite combien on en applique dans la pratique ; & cet excédant vous donnera les frottements que vous cherchez.

L'article 325 n'a beſoin d'aucun commentaire. Il en eſt de même de l'article 326 ; & ce n'eſt qu'en confirmation de la vérité qui y eſt énoncée, que je vous rapporte les deux expériences ſuivantes ; je les ai lues dans l'Eſſai de Phyſique de Muſchembroek, tom. 1. pag. 176 & ſuivantes.

Ce grand Phyſicien nous raconte qu'il fit mouvoir ſur le ſapin deux planches du même bois dont l'une avoit 3 pouces de largeur ſur 13 de longueur, & l'autre 1 pouce de largeur avec la même longueur ; & il nous aſſure que la premiere éprouva un frottement de 22, & la ſeconde de 17 dragmes. Ces deux planches n'étoient chargées chacune que d'un poids de 10 onces.

Le même Phyſicien raconte qu'il reprit la moins large de ces deux planches, & qu'il la chargea ſucceſſivement d'un poids de 3 & de 6 livres. Chargée d'un poids de 3 livres, elle n'éprouva qu'un frottement de 8 onces & 6 dragmes ; mais elle éprouva un frottement double, lorſqu'elle fut chargée d'un poids de 6 livres. Cela ſuppoſé, voici comment je raiſonne.

Une preſſion double a occaſionné un frottement une fois plus conſidérable ; & lorſqu'il s'eſt agi des ſurfaces, le frottement d'une planche de ſapin d'un pouce de largeur, a été au frottement d'une planche de même bois de trois pouces de largeur, comme 17 eſt à 22 ; donc, à proportions égales, la réſiſtance des frottements augmente plus conſidérablement par les preſſions, que par les ſurfaces. Je vous ferai cependant remarquer que cette propoſition n'eſt pas abſolument vraie dans tous les cas, mais ſeulement dans ceux qui ſont les plus ordinaires. Cette remarque n'a pas échappé à M. l'Abbé de la Caille, puiſqu'il en a fait la matiere de l'article 327.

L'article 328 eſt ſans contredit le plus intéreſſant de tous. Il n'y auroit rien eu à y ajouter, ſi l'Abbé de la Caille eût démontré que dans la figure 32 de la planche 3, FB : AB :: 1 : 3, en ſuppoſant que l'angle BAF

eſt de 19 degrés. En voici la démonſtration la plus géométrique, & par-là même la plus rigoureuſe.

Si dans le triangle rectangle B F A, l'on prend l'hypothénuſe A B pour ſinus total, le côté B F deviendra le ſinus droit de l'angle B A F. Donc F B : A B :: le ſinus droit d'un angle de 19 degrés : au ſinus total ; donc F B : A B :: 32557 : 100000, ou :: 1 : 3 ; car en ſuppoſant le ſinus total = 100000, l'on a par-là même le ſinus de 19 degrés = 32557.

La remarque de l'article 329 doit être lue avec attention.

M. Muſchembroek a fait une foule d'expériences qui peuvent ſervir de commentaire à l'article 330. Il nous raconte dans ſon *Eſſai de Phyſique tom. 1. pag. 176 & ſuivantes*, qu'il prit une petite planche de bois de ſapin, large d'un pouce & longue de 13. Il la chargea d'un poids de 10 onces ; & il la fit mouvoir tantôt ſur une planche de bois de ſapin, & tantôt ſur une planche de bouis dont le poli étoit exactement égal ; il éprouva que dans le premier cas le frottement étoit de 17, & dans le ſecond de 11 dragmes. Il fit la même expérience avec une planche de bois de chêne de même longueur & de même largeur. Il la chargea encore d'un poids de 10 onces, & il éprouva que le frottement de cette planche mue ſur le chêne étoit de 12 dragmes, & de 11 ſeulement, lorſqu'elle étoit mue ſur le bouis. Enfin il fit mouvoir un aiſſieu d'acier dans différents baſſinets d'acier, de bois de gayac, de cuivre rouge, de cuivre jaune & de plomb. Cet aiſſieu paſſoit par un diſque de bois de 4 pouces de diametre. Il éprouva que lorſque le diſque étoit chargé de 3 livres, les frottements de l'aiſſieu contre les différents baſſinets étoient de 21, 20, 15, 10 & 10 dragmes. Donc le frottement eſt plus conſidérable, lorſqu'on fait mouvoir, l'un ſur l'autre, des corps de même matiere, que lorſque ce ſont des corps de différente matiere. La raiſon qu'il apporte de cet étrange phénomene, c'eſt que des corps faits d'une même matiere, ayant des éminences & des cavités tout-à-fait ſemblables, il eſt très-facile que celles-là ne ſoient pas faites pour s'en-

grener avec aiſance dans celles-ci ; ce qui n'arrive gueres à deux corps faits de différente matiere.

Les articles 331 & 332 ne demandent aucun commentaire ; j'en ſuis charmé, car il y a long-tems que je m'apperçois que j'ai paſſé les bornes d'une lettre. J'ai l'honneur d'être, &c.

LETTRE QUINZIEME.

Remarques ſur les articles 349, 350, 354, 355, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, & 369.

A Meſure que nous avançons, les matieres deviennent toujours plus intéreſſantes. Je viens de lire, Monſieur, le chapitre des *Momens* & des *Centres de gravité* ; & le compte que je vais vous en rendre, vous prouvera que je l'ai lu à tête repoſée.

Les 15 premiers articles de ce chapitre ne contiennent gueres que des notions préliminaires. Ils ſont très bien, & ils ſe comprennent à la premiere lecture.

A ces 15 premiers articles ſuccede l'article 349 dont vous m'avez averti dans votre derniere lettre que je ſerois très mécontent. Je l'ai été en effet, & je conviens qu'il n'eſt rien de plus obſcur que la ſolution du problême qui y eſt propoſé. J'ajouterai même, ſi vous le voulez, que la figure 40 de la planche 3 n'en ſeroit que plus claire, ſi le levier donné n'avoit que la longueur P Π, & ſi le poids S dont on ne fait aucune mention, ne paroiſſoit pas ſuſpendu à l'une de ſes extrêmités. Je ne puis pas cependant m'imaginer que l'Abbé de la Caille ait dit qu'en regardant P *p* comme un levier aux deux extrêmités duquel ſont ſuſpendus les poids M, *m*, le point d'appui A ſe trouvoit entre le poids M & le poids S. C'eſt ſurement ici une faute du graveur qui auroit dû mettre le point A entre les points P & *p*. Voici donc comment j'ai réſolu ce pro-

blême, en me ſervant des formules que vous avez eu la bonté de m'envoyer.

1°. Je ſuppoſe que le levier Pp, *Fig. 3 Pl. 7*, ſoit ſans peſanteur, & qu'il ait 4 pouces de longueur. Je ſuppoſe encore au poids M 3 livres, & au poids m 1 livre de maſſe. Pour trouver leur point d'appui A, je me ſers de l'article 240; il me donne $AP = \frac{m \times Pp}{M+m} = \frac{1\times 4}{3+1} = 1$; c'eſt-à-dire, que le poids M ſera éloigné d'un pouce, & le poids m de 3 pouces du point d'appui A.

2°. Je ſuppoſe que le levier AΠ, *Fig. 3 Pl. 7*, ſoit encore ſans peſanteur, & qu'il ait 11 pouces de longueur. J'imagine un poids a de 4 livres ſuſpendu au point A, & je donne au poids μ 8 livres de maſſe. L'article 240 me donnera $\Pi Q = \frac{a \times A\Pi}{a+\mu} = \frac{4\times 11}{4+8} = \frac{44}{12} = 3\frac{2}{3}$. C'eſt-à-dire, qu'en ſuppoſant le levier PΠ ſans peſanteur, l'on aura le point d'appui Q des poids M, m, μ, éloigné du point Π de 3 pouces $\frac{2}{3}$.

3°. Je ſuppoſe maintenant que le levier PΠ dont je connois le point d'appui Q, & la longueur de 12 pouces, peſe 12 onces; je cherche ce qu'il faut ajouter au poids μ, pour que, malgré cette peſanteur, l'équilibre ſubſiſte entre les poids M, m, μ. Pour le trouver, je réſous le problême ſuivant.

Problême. La longueur, la peſanteur & le point d'appui d'un levier quelconque de la premiere eſpece étant donnés, déterminer le poids qu'il faut appliquer à l'extrêmité du bras le plus court, pour que le levier ſoit en équilibre avec lui-même.

Explication. Suppoſons que le levier PQΠ, *Fig. 3 Pl. 7*, peſe 12 onces, qu'il ait 12 pouces ou 144 lignes de longueur, & que le plus court de ſes bras QΠ en ait 44 lignes; ſuppoſons encore un poids de 12 onces ſuſpendu à ſon centre de gravité C, lequel centre de gravité C eſt éloigné du point d'appui Q de 28 lignes; l'on demande quel poids il faut ſuſpendre au point Π, éloigné

du point d'appui Q de 44 lignes, pour qu'il tienne en équilibre un poids de 12 onces ſuſpendu au point C, lequel point C n'eſt éloigné du même point d'appui que de 28 lignes.

Réſolution. 44 lignes, diſtance du point Π au point d'appui Q : 28 lignes, diſtance du point C au même point d'appui :: 12 onces : 7 onces $\frac{7}{11}$, c'eſt-à-dire, qu'en ajoutant 7 onces $\frac{7}{11}$ au poids μ, l'équilibre ſubſiſtera entre les poids M, m, μ, malgré la peſanteur du levier PQΠ.

Démonſtration. 44 lignes : 28 lignes :: 12 onces : 7 onces $\frac{7}{11}$; donc les 2 poids dont il s'agit, ont leurs maſſes en raiſon inverſe de leurs diſtances au point d'appui Q ; donc, par le principe général de la Mécanique, ils ſont en équilibre. Voilà pour l'article 349.

L'article 240 conduit encore à l'intelligence de l'article 350. En effet l'article 240 donne l'équation $\frac{p \times AB}{P+p} = AD$. Cette équation ſe décompoſe en la proportion ſuivante ; $P+p$, eſt à la longueur du levier AB aux extrêmités duquel on les applique ; comme le poids p, eſt à la diſtance du poids P au point d'appui D de la figure 27 de la planche 2. Or cette proportion juſtifie celle de l'article 350, ſeule capable d'embarraſſer le lecteur. Donc l'article 240 conduit à l'intelligence de l'article 350.

Les articles 351, 352 & 353 ne demandent aucun commentaire.

L'article 354 apprend à trouver le centre de gravité de tout polygone régulier dont le nombre des côtés eſt impair. La méthode qu'il contient, ne peut pas s'appliquer aux polygones réguliers dont le nombre des côtés eſt pair, par exemple, au quarré, parce qu'il n'eſt point d'angle du quarré qui ſoit oppoſé au point du milieu d'un de ſes côtés quelconques ; il en eſt de même de l'exagone, de l'octogone, &c.

Qu'on ne conclue pas delà cependant que dans les polygones réguliers dont le nombre des côtés eſt pair, le

centre de gravité eſt diſtingué du centre de figure ; cette conſéquence ſeroit très fauſſe.

M. l'Abbé de la Caille, après avoir démontré à l'article 355, que AF = $\frac{2}{3}$ AE de la figure 42 de la planche 3, avance qu'on démontrera par la même méthode que CF = $\frac{2}{3}$ CD. En effet ayant tiré HD parallele à CB, *Fig. 4 Pl. 7*, vous aurez d'abord, à cauſe des triangles ſemblables AHD, AEB, la proportion ſuivante ; AD : AB :: HD : EB ou EC ; mais AD = $\frac{1}{2}$ AB, donc HD = $\frac{1}{2}$ EC.

L'on a encore, à cauſe des triangles ſemblables HFD, CFE, la proportion ſuivante ; HD : EC :: FD : CF ; mais HD = $\frac{1}{2}$ EC, donc FD = $\frac{1}{2}$ CF, donc CF = $\frac{2}{3}$ CD.

Les articles 356, 357, 358, 359 & 360 ſe comprennent à la premiere lecture. Il n'en eſt pas ainſi des articles 361 & 362 ; auſſi allons-nous en donner le commentaire.

Pour comprendre l'article 361, il faut ſe rappeller d'abord que les angles ACK, *Fig. 43 Pl. 3*, ADG ſont égaux. En effet l'angle au centre ACK eſt meſuré par la moitié de l'arc AD, parce qu'il n'inſiſte que ſur la moitié de cet arc ; l'angle à la circonférence ADG ou ADB qui inſiſte ſur tout l'arc AB, n'eſt, par-là même, meſuré que par la moitié de cet arc. Mais l'arc AD = l'arc AB, donc $\frac{1}{2}$ arc AD = $\frac{1}{2}$ arc AB ; donc l'angle ACK, meſuré par la moitié de l'arc AD, eſt égal à l'angle ADG, meſuré par la moitié de l'arc AB.

Il faut enſuite ſe rappeller que dans le triangle AKC, rectangle en K, on ne peut pas prendre la baſe AC pour ſinus total, ſans que le côté CK ſoit le ſinus de l'angle CAK, & par-là même le coſinus de l'angle ACK, ou de la moitié de l'arc AD qui eſt la meſure de cet angle.

Ces notions élémentaires de Géométrie & de Trigonométrie rendent très-intelligible l'article 362, dont la derniere conſéquence doit être énoncée en ces termes : *donc la*

ſomme des quatre cordes de quatre arcs égaux, eſt à la corde totale, comme CK *coſinus de la moitié d'un de ces arcs, eſt à* CG *diſtance des centres de gravité & de figure*; & non pas, *donc la ſomme des 4 arcs égaux, eſt à la corde totale, comme* CK *coſinus de la moitié d'un de ces arcs, eſt à* CG *diſtance des centres de gravité & de figure.*

Les articles 363, 364 & 365 demandent un commentaire d'autant plus difficile, qu'il faut entrer dans un calcul que M. l'Abbé de la Caille n'a fait qu'indiquer. En effet il avance d'abord (art. 363) que pour réduire en parties égales, telles que ſont celles du rayon des tables des ſinus, un arc de cercle de 55°, il faut faire cette analogie; 180° : 55° :: 3,14159 : 0,95991. L'on peut d'abord demander ſur quel principe l'Abbé de la Caille s'eſt fondé, pour faire 180° = 3,14159.

Il eſt facile de ſatisfaire à cette premiere queſtion, ſi l'on ſe rappelle que dans les tables des ſinus, l'on fait le rayon = 1,00000; donc l'on aura le diametre = 2,00000; donc l'on aura la circonférence entiere = 6,28318, parce que le diametre étant à la circonférence, comme 113 eſt à 355, l'on aura la valeur de la circonférence, en diſant, 113 : 355 :: 2,00000 : x = 6,28318; donc l'on aura la demi-circonférence = 3,14159; mais la demi-circonférence eſt de 180°; donc 180° = 3,14159.

On peut encore demander la valeur du ſinus de 27°, 30'. On répondra à cette ſeconde queſtion que dans les tables où l'on fait le rayon ou ſinus total = 1,00000, l'on trouve le ſinus de 27°, 30' = 0,46175; donc la corde de 55°, double du ſinus de 27°, 30', ſera = 0,92350.

L'on peut enfin demander comment la proportion 0,95991 : 0,92350 :: 1 : x; l'on peut, dis-je, demander comment cette proportion donne x = 0,96207.

On répondra à cette queſtion en diſant qu'il ne faut pas multiplier 0,92350 par 1, mais 0,92350 par 1,00000; ce qui donne pour produit 0,923500000. Or en diviſant ce produit par 0,95991, l'on a pour quotient 0,96207.

L'on cherche à l'article 364 le centre de gravité d'un ſecteur de 55°. Puiſque 0,66666 ſont à-peu-près les $\frac{2}{3}$ de 1,00000, on le trouvera en diſant; 0,95991 : 0,92350 :: 0,66666 : 0,64138. Ce quatrieme terme donne le centre de gravité du ſecteur en queſtion; & comme 0,64138 eſt préciſément les deux tiers de 0,96207, l'Abbé de la Caille a eu raiſon de dire que pour trouver le centre de gravité d'un ſecteur quelconque, il faut prendre ſur le rayon qui diviſe le ſecteur en deux également, un point qui ſoit éloigné du centre de l'arc des $\frac{2}{3}$ de la diſtance du même centre au centre de gravité de l'arc.

L'article 365 eſt encore plus difficile que les deux précédents. Pour m'en tirer, il m'a fallu non-ſeulement relire l'article 241 de ce traité, mais encore les articles 592 & 604 des Leçons Élémentaires de Mathématiques, dont le premier apprend à trouver la ſurface d'un triangle quelconque rectiligne, & le ſecond celle d'un ſecteur de cercle.

Pour ſuivre enſuite plus facilement M. l'Abbé de la Caille dans ſes calculs, j'ai cherché d'abord en parties égales, telles que ſont celles du rayon des tables des ſinus, la valeur de la hauteur du triangle ACB de la figure 45 de la planche 3; & comme cette hauteur eſt préciſément le ſinus d'un angle de 62°, 30', j'ai trouvé que la hauteur de ce triangle = 0,88701.

Nous avons déja remarqué (art. 355) que CP doit être les $\frac{2}{3}$ de 0,88701; donc CP = 0,59134.

On a la ſurface du triangle ACB en multipliant ſa hauteur 0,88701 par la moitié de ſa baſe AB = 0,46175: donc la ſurface du triangle ACB = 0,4095768675 = 0,40957.

On a la ſurface du ſecteur ADBC en multipliant la moitié de l'arc ADB = 0,47996 par le rayon CD = 1,00000; donc la ſurface du ſecteur ADBC = 0,4799600000 = 0,47996.

Otons maintenant de la ſurface du ſecteur ADBC celle du triangle ACB: il reſtera 0,07039 pour la valeur de

la ſurface du ſegment ADBA, & non pas 0,7039 ; mais c'eſt-là évidemment une faute d'impreſſion.

PR = CR — CP = 0,64138 — 0,59134; donc PR = 0,05004.

$Rp = \frac{0,40957 \times 0,05004}{0,07039} = 0,29115$, & non pas 0,29117.

Cp = CR + Rp = 0,64138 + 0,29115 ; donc Cp = 0,93253, & non pas 0,93255.

Dp = CD — Cp = 1,00000 — 0,93253 ; donc Dp = 0,06747, & non pas 0,06745.

Remarque. Connoiſſant la valeur du rayon du cercle en pieds, pouces, &c. l'on pourra, par le moyen des parties égales, trouver, pour les articles 363, 364 & 365, le lieu du centre de gravité marqué en pieds, pouces, &c. Suppoſons donc que le rayon du cercle que nous avons diviſé en 100000 parties égales, ait 25 pieds de long, l'on dira, pour l'article 363; 100000 : 96207 :: 25 : 24 $\frac{5175}{100000}$, c'eſt-à-dire, que le centre de gravité d'un arc de 55 degrés, dont le rayon eſt de 25 pieds, eſt éloigné du centre du cercle de 24 pieds & quelques lignes.

Pour l'article 364, l'on dira ; 100000 : 64138 :: 25 : 16 $\frac{3450}{100000}$, c'eſt-à-dire, que le centre de gravité d'un ſecteur de cercle de 55 degrés, dont le rayon eſt de 25 pieds, eſt éloigné du centre du cercle de 16 pieds & quelques lignes.

Enfin pour l'article 365, l'on dira ; 100000 : 93255 :: 25 : 23 $\frac{31375}{100000}$, c'eſt-à-dire, que le centre de gravité d'un ſegment de cercle de 55 degrés, dont le rayon eſt de 25 pieds, eſt éloigné du centre du cercle de 23 pieds & quelques pouces.

Avant que d'entreprendre la lecture de l'article 366, il faut relire auparavant les articles 651, 652, 653, 654 & 655 des éléments des Mathématiques de M. l'Abbé de la Caille, où l'on trouve quelle eſt l'origine, & quelles ſont les principales propriétés de la pyramide.

Il faut ſe rappeller enſuite que les 2 triangles FDE & ADS de la figure 46 de la planche 3, ſont ſemblables,

parce qu'ils ont l'angle D commun, & les côtés autour de cet angle proportionnels.

Il faut enfin ſe rappeller que les triangles FGE & SAG de la même figure ſont ſemblables, parce qu'ils ont les angles en G oppoſés par la pointe, & que les angles E & A ſont alternes.

Avec ces connoiſſances préliminaires l'on comprendra ſans peine l'article 366. Qu'on faſſe cependant attention au raiſonnement que fait l'Abbé de la Caille à la fin de cet article. Il eſt concluant pour ceux qui en méditent la juſteſſe. En effet le plan dont il parle, ne peut pas paſſer par le centre de gravité de la pyramide totale, ſans que ce centre ſe trouve au centre de gravité de ce plan. Mais le centre de gravité de ce plan eſt préciſément aux $\frac{3}{4}$ de la longueur de la droite tirée du ſommet au centre de gravité de la baſe, parce que le plan dont il s'agit ici eſt ſuppoſé parallele à la baſe de la pyramide totale, & qu'il a le même nombre de côtés que cette baſe. Donc &c.

L'article 367 ne peut embarraſſer que celui qui ne prend pas garde qu'un cone eſt une pyramide à baſe circulaire.

L'article 368 demande un grand commentaire. Pour trouver le centre de gravité du cone DEBC, *Fig. 3 Pl. 7*, tronqué par le plan B*b*C*c* parallele à la baſe D*d*E*e*, il faut d'abord ſe rappeller l'article 710 des élémens de Mathématiques de l'Abbé de la Caille, qui apprend à trouver la ſolidité du cone entier DAE. Il faut enſuite chercher par les mêmes principes la ſolidité du petit cone BAC, l'ôter de la ſolidité du cone DAE, & le reſtant donnera la ſolidité du cone tronqué DEBC. Suppoſons donc que l'axe A*e* du cone DAE ait 40 pieds de longueur, & que ſa ſolidité ſoit de 300 pieds cubes; il aura ſon centre de gravité au point G, éloigné de 30 pieds du ſommet A. Suppoſons encore que le petit cone BAC ait 50 pieds cubes de ſolidité, & que ſon axe A*c* ait 20 pieds de longueur, il aura ſon centre de gravité au point *g*, éloigné du ſommet A de 15 pieds.

Pour trouver le centre de gravité X du cone tronqué DEBC, je conſidere la ligne gGX comme un levier, dont le point d'appui eſt au point G, centre de gravité du cone entier DAE, & dont les 2 extrêmités g & X ſont chargées, l'une du centre de gravité g du petit cone BAC, & l'autre du centre de gravité X du cone tronqué DEBC, dont la ſolidité eſt de 250 pieds cubes. Pour avoir la longueur XG, je dis donc, (art. 241) $XG =$ ſolidité du cone $BAC \times gG$, diviſée par la ſolidité du cone DAE — la ſolidité du cone BAC, ou $XG = \frac{50 \times 15}{300 - 50} = \frac{750}{250} = 3$, c'eſt-à-dire, que le centre de gravité du cone tronqué DEBC ſera éloigné de 3 pieds du ſommet A, ou de 7 pieds du centre de la baſe Dde.

L'article 369 ne peut être compris que par ceux qui ſe rappellent les articles 709, 710, 711, 712 & 713 des éléments de Mathématiques de M. l'Abbé de la Caille. En effet ſuppoſons un cylindre ABED de la figure 47 de la planche 3, dont AB ſoit le diametre du cercle qui lui ſert de baſe, & CI la hauteur; il ſuit de l'article 709 que ſa ſolidité eſt égale au produit de la ſurface du cercle qui lui ſert de baſe par la hauteur CI.

Suppoſons enſuite un cone dont ED ou AB ſoit le diametre du cercle qui lui ſert de baſe, & CI la hauteur; il ſuit de l'article 710 que ſa ſolidité eſt égale au tiers du produit de la ſurface du cercle qui lui ſert de baſe par la hauteur CI; donc le cone en queſtion n'a que le tiers de la ſolidité du cylindre dont il s'agit; & c'eſt-là préciſément le réſultat de l'article 711 qui apprend qu'un cone n'a que le tiers de la ſolidité d'un cylindre de même baſe & de même hauteur.

Suppoſons enfin une demi-ſphere AID dont AB ſoit le diametre du cercle qui lui ſert de baſe, & CI la hauteur; il ſuit de l'article 712 que ſa ſolidité eſt égale aux deux tiers du produit de la ſurface du grand cercle qui lui ſert de baſe par la hauteur CI; donc la ſolidité du cylindre ABED eſt égale à la ſolidité de la demi-ſphere

AID & du cone ECD prises ensemble, & c'est-là le résultat de l'article 713; donc la solidité de la demi-sphere AID est double de la solidité du cone ECD.

Toutes ces connoissances sont nécessaires pour bien comprendre l'article 369 qui ne présente presque plus de difficulté, sur-tout lorsqu'on se rappelle que la moitié de $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, & que $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$.

L'article 370 ne demande aucun commentaire. Il n'en est pas ainsi des 5 articles suivants; ils en demandent un, peut-être plus long que cette lettre. Je vous prie de vous en charger & de me croire, &c.

RÉPONSE.

Remarques sur les articles 371 & 372. Commentaire des articles 373, 374 & 375.

LE commentaire dont vous me parlez, Monsieur, ne sera pas aussi long que vous le pensez; les articles 371, 372, 373, 374 & 375 ne supposent que la connoissance des premiers éléments des calculs différentiel & intégral; & je me rappelle que vous ne parutes pas mécontent du commentaire que je vous envoyai sur cette matiere, lorsque vous lisiez les Leçons Élémentaires de Mathématiques de M. l'Abbé de la Caille. Relisez donc à votre loisir *mon Guide des jeunes Mathématiciens*, depuis la page 183 jusqu'à la page 214, & vous conviendrez qu'il y a dans les articles que vous venez d'expliquer des choses beaucoup plus difficiles, que dans ceux que vous m'avez chargé de commenter.

Et d'abord, il n'est rien bien surement qui soit capable de vous arrêter dans la lecture des articles 371 & 372; vous savez aussi bien que moi que $s\,y\,dx$ signifie la somme de tous les espaces infiniment petits $y\,dx$.

Pour l'article 373, je conviens qu'il a besoin d'un commentaire.

mentaire. Auſſi vais-je commencer par réſoudre le problême ſuivant.

Trouver la quadrature d'un eſpace quelconque renfermé entre une ordonnée, une partie de l'axe, & un arc d'une parabole quelconque B A μ, *Fig. 48 Pl. 3?*

Reſolution. En nommant y une ordonnée quelconque P M, & en nommant x ſon abſciſſe correſpondante A P, je dis que l'eſpace A P M ſera $\frac{2}{3}\ x\ y$, c'eſt-à-dire, ſera égal aux deux tiers de l'eſpace contenu dans un rectangle qui auroit pour baſe l'ordonnée P M & pour hauteur l'abſciſſe A P. Pour le démontrer je tire $p\ m$ infiniment près de P M; je tire encore M R parallele à P p, & dans le trapeze infiniment petit du premier ordre P M $p\ m$ je néglige le triangle infiniment petit du ſecond ordre M R m, afin d'avoir le rectangle infiniment petit du premier ordre P p M R $= y\ dx$, parce que P M $= y$, & P $p = dx$.

Démonſtration. 1°. L'aire du rectangle P p M R eſt une partie infiniment petite de l'eſpace A P M qu'il faut quarrer, parce que $p\ m$ eſt ſuppoſé infiniment près de P M.

2°. L'aire du rectangle P p M R $=$ P M $\times$ P $p = y \times dx = y\ dx$; donc $y\ dx$ eſt une partie infiniment petite de l'eſpace A P M; donc intégrer $y\ dx$, c'eſt quarrer l'eſpace A P M.

3°. L'équation à la parabole eſt $p\ x = y\ y$.

4°. La différence de cette équation dans laquelle p eſt une quantité conſtante, eſt $p\ dx = 2\ y\ dy$; donc $dx = \frac{2\ y\ dy}{p}$; donc $y\ dx = \frac{2\ y\ y\ dy}{p}$; donc intégrer $\frac{2\ y^2\ dy}{p}$; c'eſt intégrer $y\ dx$.

5°. L'intégrale de $\frac{2\ y^2\ dy}{p} = \frac{2\ y^{2+1}}{2+1\ p} = \frac{2\ y^3}{3\ p}$.

6°. $y\ y = p\ x$; donc $\frac{2\ y^3}{3\ p} = \frac{2\ p\ x\ y}{3\ p} = \frac{2}{3}\ x\ y$; ce qu'il falloit démontrer.

7°. Par la même raiſon l'eſpace A $\pi\ \mu = \frac{2}{3}\ \overline{A\ \pi} \times \overline{\pi\ \mu}$; donc l'Abbé de la Caille a eu raiſon d'avancer au commencement de l'article 373 que $s\ y\ dx = \frac{2}{3}\ x\ y$.

Lorſqu'on prend l'unité pour parametre de la parabole,

alors l'équation $yy = px$ devient $yy = 1 \times x$; ce qui donne $y = x^{\frac{1}{2}}$, & par conséquent $\frac{2}{3} xy = \frac{2}{3} x^{1+\frac{1}{2}}$, ou $\frac{2}{3} xy = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$; donc en faisant $p = 1$, l'on a $s\,y\,dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$.

Par la même raison $s\,x\,y\,dx$ deviendra $s x^{\frac{3}{2}} dx$, parce qu'il est impossible d'avoir $\frac{2}{3} xy = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, sans avoir $xy = x^{\frac{1}{2}}$.

En intégrant $x^{\frac{3}{2}} dx$, l'on aura $\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$. Mais $x^{\frac{5}{2}}$ divisé par $\frac{5}{2}$ donne pour quotient $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$; donc $s\,x\,y\,dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$.

Divisons maintenant $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$ par $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, l'on aura pour quotient $\frac{3}{5} x$, parce que $\frac{2}{5}$ divisé par $\frac{2}{3}$ donne $\frac{6}{10}$ ou $\frac{3}{5}$, & que $x^{\frac{5}{2}}$ divisé par $x^{\frac{3}{2}}$ donne $x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$.

Reprenons en peu de mots toutes ces opérations. $s\,x\,y\,dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$, & $s\,y\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$; donc $\frac{s\,x\,y\,dx}{s\,y\,dx} = \frac{\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} x$.

Mais $AQ = \frac{s\,x\,y\,dx}{s\,y\,dx}$, donc $AQ = \frac{3}{5} x = \frac{3}{5} AP$; & voilà le commentaire de l'article 373. L'article 374 en demande un encore plus considérable.

Pour saisir sans peine cet article, il faut avoir présents à l'esprit les articles 661 & 976 des Leçons de Mathématiques de l'Abbé de la Caille, & le commentaire que nous avons donné du dernier de ces deux articles à la page 213 de *notre Guide des jeunes Mathématiciens*. L'article 661 apprend que les éléments d'une sphere quelconque sont des cylindres infiniment minces, dont l'épaisseur est dx. Il suit de l'article 976, & du commentaire que nous en avons donné dans *notre Guide*, que l'expression d'un de ces cylindres est $c\,x\,dx - \frac{c\,x\,x\,dx}{2r}$. Cela supposé, voici comment je raisonne.

1°. L'intégrale de $cx\,dx - \frac{cx\,x\,dx}{2r}$ donnera la ſomme des cylindres élémentaires qui ſont un effort commun ſur le ſommet du ſegment ſphérique dont on cherche le centre de gravité ; mais l'intégrale dont il s'agit, eſt $\frac{cx^{1+1}}{2} - \frac{cx^{2+1}}{3\times 2r} = \frac{1}{2}cxx - \frac{cx^3}{6r}$; donc la ſomme de tous ces cylindres élémentaires eſt repréſentée par $\frac{1}{2}cxx - \frac{cx^3}{6r}$.

2°. Puiſque x eſt la diſtance de chaque cylindre élémentaire au point où il fait ſon effort, le *moment* de chaque cylindre ſera $cx\,x\,dx - \frac{cx^1 dx}{2r}$; & l'intégrale de cette différentielle donnera la ſomme des *moments* de tous les cylindres élémentaires. Mais l'intégrale de la différentielle en queſtion eſt $\frac{cx^{2+1}}{3} - \frac{cx^{3+1}}{8r} = \frac{1}{3}cx^3 - \frac{cx^4}{8r}$; donc la ſomme des *moments* de tous les cylindres élémentaires eſt repréſentée par $\frac{1}{3}cx^3 - \frac{cx^4}{8r}$.

3°. Pour avoir la diſtance du ſommet d'un ſegment de ſphere à ſon centre de gravité, il faut diviſer la ſomme des *moments* des cylindres dont le ſegment eſt compoſé par la ſomme des maſſes de ces mêmes cylindres élémentaires ; & le quotient donnera ce que l'on cherche. Diviſons donc $\frac{1}{3}cx^3 - \frac{cx^4}{8r}$ par $\frac{1}{2}cxx - \frac{cx^3}{6r}$, nous aurons pour quotient $\frac{8rx - 3xx}{12r - 4x}$; en voici la démonſtration.

$\frac{1}{3}cx^3 - \frac{cx^4}{8r}$ diviſé par $\frac{1}{2}cx^2 - \frac{cx^3}{6r}$ n'eſt pas différent de $\frac{cx^3}{3} - \frac{cx^4}{8r}$ diviſé par $\frac{cx^2}{2} - \frac{cx^3}{6r}$.

En réduiſant ces fractions à une même dénomination, l'on a $\frac{8crx^3 - 3cx^4}{24r}$ diviſé par $\frac{6crx^2 - 2cx^3}{12r}$.

Ces deux dernieres fractions diviſées l'une par l'autre, donnent pour quotient $\frac{96crrx^3 - 36crx^4}{144crrxx - 48crx^3} = \frac{8rx - 3xx}{12r - 4x}$.

parce qu'on a diviſé par 12 les coefficients des différents membres de ce quotient, & qu'on a ôté certaines lettres communes à ſon numérateur & à ſon dénominateur.

$\frac{8rx - 3xx}{12r - 4x} = \frac{2rx - \frac{1}{4}xx}{3r - x}$, parce qu'on a diviſé par 4 les différents coefficients de la premiere de ces deux fractions.

$\frac{2rx - \frac{1}{4}xx}{3r - x}$ donne l'analogie ſuivante $3r - x : 2r - \frac{1}{4}x :: x$: à la diſtance du ſommet du ſegment ſphérique en queſtion, à ſon centre de gravité. Appliquons cette formule à différents cas, & nous en comprendrons toute la beauté.

1°. Suppoſons une ſphere AEDF, *fig. 6 pl. 7*, dont le rayon AC $= r$, ait 10 pieds de long, & dont le ſegment AM*b*N ait 4 pieds d'épaiſſeur; l'on aura alors A*b* $= x = 4$.

Pour trouver le centre de gravité du ſegment ſphérique AM*b*N, l'on dira, $3r - x : 2r - \frac{1}{4}x :: x$: à la diſtance du point A au centre de gravité que l'on cherche; donc l'on aura, $26 : 17 :: 4 : 2\frac{4}{13}$, c'eſt-à-dire, que le point A ſera éloigné du centre de gravité du ſegment AM*b*N de 2 pieds $\frac{4}{13}$.

2°. Si l'on cherche le centre de gravité de la demi-ſphere AECF, l'on prendra garde que l'épaiſſeur AC ou x devient r, & la formule précédente ſe changera en celle-ci, $2r : \frac{5}{4}r :: r$: à la diſtance du point A au centre de gravité de la demi-ſphere AECF; donc $20 : \frac{50}{4} :: 10 : 6\frac{1}{4}$, c'eſt-à-dire, que le point A ſera éloigné du centre de gravité de la demi-ſphere AECF de 6 pieds & $\frac{1}{4}$.

3°. Si l'on cherche le centre de gravité de la ſphere entiere AEDFC, l'on prendra garde que l'épaiſſeur AD ou x devient $2r$, & la formule précédente ſe changera en celle-ci, $r : \frac{1}{2}r :: 2r$: à la diſtance du point A au centre de gravité de la ſphere AEDFC; donc $10 : 5 :: 20 : 10$, c'eſt-à-dire, que dans une ſphere quelconque ſon centre de gravité concourt avec ſon centre de figure C.

Vous voyez, Monſieur, que j'ai eu raiſon d'avancer que l'article 374 avoit beſoin d'un aſſez long commentaire. L'Abbé de la Caille avertit à l'article 375, qu'on trouvera le centre de gravité d'une zone ſphérique par le moyen de celui du ſegment, comme on trouve celui d'un cone tronqué par le moyen du cone entier. Il a raiſon. Mais écrire de la ſorte, c'eſt s'épargner beaucoup de peine, & laiſſer preſque tout à faire à ſon lecteur. Développons donc ſa penſée, & mettons-la à la portée des commençans ordinaires.

Pour trouver le centre de gravité de la zone ſphérique A *g* K D, *fig. 6 pl. 7*, voici comment je m'y prends. 1°. Par les principes énoncés aux articles 712, 975 & 976 des Elémens de Mathématiques dont j'ai déja donné le commentaire, je cherche la ſolidité de la demi-ſphere A E D C, & celle du ſegment ſphérique *g* E K.

2°. J'ôte la ſolidité du ſegment ſphérique *g* E K de celle de la demi-ſphere A E D C; le reſtant me donne la ſolidité de la zone ſphérique A *g* K D.

3°. Je cherche par les principes ordinaires le centre de gravité de la demi-ſphere A E D C & celui du ſegment ſphérique *g* E K.

4°. Suppoſons que le centre de la demi-ſphere A E D C ſoit au point *n*, celui du ſegment ſphérique *g* E K au point *m*, & celui de la zone ſphérique A *g* K D au point *x*. Pour trouver la diſtance *n x*, vous conſidérerez, comme vous avez fait pour le cone tronqué dans votre derniere lettre, la ligne *m n x* comme un levier de la premiere eſpece dont le point d'appui *n* eſt chargé de la ſolidité de la demi-ſphere A E D C, & l'extrêmité *m* de la ſolidité du ſegment ſphérique *g* E K. Vous direz enſuite, *n x* = ſolidité du ſegment ſphérique *g* E K × *m n*, diviſée par la ſolidité de la zone ſphérique A *g* K D. Mais les quantités qui compoſent le ſecond membre de cette équation ſont toutes connues; donc *n x* devient une quantité connue.

Je vous le repete, Monſieur, le commentaire que vous m'avez demandé n'eſt pas auſſi long que vous vous l'étiez

d'abord imaginé ; il eſt même trop long pour un homme qui a lu, avec autant d'attention que vous, les Leçons Élémentaires de Mathématiques de l'Abbé de la Caille. J'ai l'honneur d'être, &c.

LETTRE SEIZIEME.

Remarques ſur les articles 376, 377, 378, 384, 385, 389, 392, 394, 395, 398, 399, 401, 402, & 403.

DAns la Mécanique de l'Abbé de la Caille, Monſieur, les propriétés des centres de gravité ſont aſſez bien expliquées depuis l'article *376* juſqu'à l'article 403. Cependant comme l'importance de la matiere m'a engagé à lire ces articles avec encore plus de réflexion que les précédents, permettez-moi de vous faire part des remarques que j'ai faites en les liſant. La premiere regarde l'article *376*. Il eſt dit dans cet article que ſi deux corps A, B, *fig. 49 pl. 3*, dont le centre commun de gravité eſt en G, ſont mus dans la droite AB, en ſe rapprochant tous deux, ou en s'éloignant tous deux du point G, avec des vîteſſes en raiſon inverſe de leurs maſſes, leur centre commun de gravité reſtera fixe au point G.

La démonſtration qu'en donne l'Abbé de la Caille eſt bonne. Il me paroît cependant que la ſuivante eſt beaucoup plus ſenſible. Je vous en laiſſe le juge. La voici. Conſidérons la ligne AB comme un levier ſans peſanteur dont le point d'appui eſt au point G, & aux extrêmités duquel les corps A & B ſe trouvent dans un parfait équilibre. Suppoſons que le corps A ait 2 livres & le corps B 1 livre de maſſe. Suppoſons encore que la ligne AB ait 6 pieds de longueur ; le corps A (art. 233) ſera à 2 pieds, & le corps B à 4 pieds du point d'appui G.

Faiſons approcher ces deux corps du point G avec des vîteſſes en raiſon inverſe de leurs maſſes. Si le corps A

s'approche de 1 pied du point G, le corps B s'en approchera de 2. Dans cette hypotheſe, le point d'appui (art. 216, 217) du levier A B ne changera pas. Il en ſeroit de même, ſi la ligne A B avoit plus de longueur, & que le corps A s'éloignât de 1 pied du point G, tandis que le corps B s'en éloigneroit de 2. Donc deux corps peuvent être mus uniformément ſur un levier dont le point d'appui reſte fixe.

Ce qu'on dit du point d'appui G doit ſe dire du centre de gravité des corps A & B; donc il n'eſt rien que de vrai dans l'expoſé de l'article 376.

Il eſt dit à l'article 377 que ſi deux corps A, B, dont le centre commun de gravité eſt en G, ſont mus uniformément en ſens contraire le long de deux paralleles A *a*, B *b*; enſorte que leurs vîteſſes ſoient en raiſon inverſe des maſſes, ou, comme A G à B G; leur centre commun de gravité G reſtera auſſi fixe en G, *fig. 7 pl. 7*. La démonſtration ſuivante me paroît plus claire que celle de M. l'Abbé de la Caille.

Conſidérons la ligne BGA comme un levier dont le point d'appui eſt en G, & donnons 2 livres de maſſe au corps B, & 1 livre au corps A. Suppoſons enſuite que la ligne B *b*, parcourue en 2 inſtants par le corps B, ait 2 pieds de longueur; la ligne A *a*, parcourue en 2 inſtants par le corps A, en aura par-là même 4. Tirons enfin la ligne *m* G *n* qui partage en 2 parties égales les lignes A *a* & B *b*. Cela fait, voici comment je raiſonne.

Puiſque les corps A & B ſe meuvent d'un mouvement uniforme, avec une vîteſſe qui ſoit en raiſon inverſe de leurs maſſes, le corps B ira au premier inſtant du point B au point *m*, tandis que le corps A ira du point A au point *n*; je dis que ces 2 corps arrivés, l'un en *m* & l'autre en *n*, auront leur centre de gravité au point G. En effet le centre de gravité des corps A & B, arrivés en *n* & *m*, doit être tellement placé, que leur diſtance à ce centre ſoit comme A G à B G. Mais à cauſe des triangles ſemblables A G *n*, B G *m*, l'on a G *n* : G *m* : : A G : B G;

donc le centre de gravité des corps A & B, arrivés en *n*, & *m*, eſt au point G.

Ce que nous avons dit des points *m* & *n*, nous le dirons des autres points pris ſur les lignes B *b* & A *a*; donc l'article 377 eſt inconteſtable.

Il en eſt de même de l'article 378. Tout ce qu'on pourroit ajouter à la démonſtration qu'il préſente, c'eſt que, lorſqu'il s'agit de la figure 52 de la planche 4, il ne faut pas dire ſimplement S B : S *b* :: B A : *b a*; mais il faut dire S B : S *b* :: S A : S *a*; donc S B + S A : S B :: S *b* + S *a* : S *b*; donc B A : S B :: *b a* : S *b*; donc S B : S *b* :: B A : *b a*.

L'article 379 n'a pas beſoin de commentaire. Il en eſt de même de l'article 380; la vérité qu'on y énonce, y eſt préſentée avec toute la clarté poſſible.

Pour ce qui regarde les ſcholies des articles 381, 382 & 383, elle ſe comprennent à la premiere lecture. Je ne crois pas cependant qu'elles aient été traitées avec toute l'étendue dont elles ſont ſuſceptibles; voyez, Monſieur, ſi vous voudriez y ſuppléer.

L'article 384 n'en ſeroit que plus clair, ſi l'Abbé de la Caille eût commencé ainſi ſa démonſtration; on a par la nature du centre de gravité, & par la conſtruction des figures, M : N :: B G : A G; donc, *componendo*, M : M + N :: B G : B G + A G; donc M : M + N :: B G : B A &c. Le reſte ne peut pas être lu avec attention, ſans être compris par ceux qui ſavent manier les plus ſimples équations de l'algébre.

Les équations de l'article 385 ſont de la même eſpece; elle ne demandent que d'être lues avec attention. Le renvoi à l'article 359 eſt apparemment une faute d'impreſſion; c'eſt à l'article 380 que l'Auteur a voulu renvoyer. Je ne vois gueres de relation entre les articles 359 & 385. J'en vois auſſi peu entre ce dernier article, & l'article 72. Il eût été plus ſimple de faire remarquer que, par tous les raiſonnements qu'on a faits, on a réduit les choſes au cas de l'article 384.

Les ſcholies des articles 386, 387 & 388 ſe comprennent à la premiere lecture ; elles pourroient cependant, comme les trois précédentes, être traitées avec beaucoup plus d'étendue.

La démonſtration de la vérité énoncée à l'article 389 eſt inconteſtable ; ce n'eſt que pour la rendre encore plus ſenſible, que j'ajoute ici la remarque ſuivante.

Il ſuit de l'article 380 que c'eſt ſeulement en vertu des forces A G & B F, *fig. 17 pl. 2*, que le centre de gravité des corps A, B doit ſe mouvoir. Mais nous avons déja remarqué, en parlant du choc oblique des corps, qu'après le choc ces forces demeuroient les mêmes, & étoient repréſentées l'une par P H & l'autre par L I ; donc après le choc le centre de gravité des corps A, B, doit ſe mouvoir ſeulement en vertu des forces P H & L I ; donc ſon mouvement n'a dû être ni altéré, ni détourné par le choc, parce que P H = A G, & B F = L I ; donc en général le mouvement du centre commun de gravité de deux corps ſphériques à reſſort parfait, n'eſt ni altéré, ni détourné par le choc.

L'article 390 n'a pas beſoin de commentaire. Il en eſt de même de l'article 391. Pour l'article 392, il ne ſauroit ſe paſſer de la démonſtration ſuivante.

Suppoſons le quarré A B C F, *fig. 8 pl. 7*, égal au quarré C P Q R, l'on aura la diagonale F C égale à la diagonale C R. Suppoſons encore en R une puiſſance qui pouſſe le corps C dans la direction R C, tandis que les puiſſances A & B le pouſſent, l'une ſelon la direction A C Q & l'autre ſelon la direction B C P, l'on aura (art. 205) les trois puiſſances A, B, R en équilibre autour du point C.

Tirons les droites A R, B R & B A pour former le triangle B R A, l'on aura (art. 354) le centre de gravité de ce triangle aux $\frac{2}{3}$ de la ligne S R. Mais le point C eſt préciſément aux $\frac{2}{3}$ de la ligne S R, parce que la diagonale C R eſt double de la demi-diagonale C S ; donc ſi par les points où ſont placées trois puiſſances en

équilibre autour d'un point C, on tire les droites qui forment un triangle, le point C ſera le centre de gravité de ce triangle.

La remarque de l'article 393 ne peut paroître obſcure qu'à ceux qui n'auroient pas compris l'article 391.

Pour rendre ſenſible la démonſtration de l'article 394, il faut d'abord du point G de la figure indiquée par cet article, c'eſt-à-dire, de la figure 46 de la planche 3, tirer une diagonale qui repréſente les 2 forces AG & BG. Il faut enſuite tracer un quadrilatere qui ait pour un de ſes côtés cette diagonale, & GC pour l'autre côté. Vous vous convaincrez alors que GF eſt le commencement de la diagonale de ce nouveau quadrilatere, & que par conſéquent GF ſera la direction compoſée des forces AG, BG, CG.

L'article 395 contient deux choſes, la démonſtration de la vérité qui y eſt énoncée, & l'application de cette démonſtration. La démonſtration eſt très-claire, l'application ne l'eſt pas autant. Suppléons-y par le commentaire ſuivant.

1°. Le cylindre CADB, *fig. 9 pl. 7*, eſt produit (élém. 656) par le rectangle MANB qui tourne ſur le côté MN. Si nous nommons *a* ſa hauteur AB, & *b* ſa baſe NB, nous aurons *a b* pour l'expreſſion algébrique de ce rectangle. Son centre de gravité eſt préciſément au point R, milieu de ſon aire : or $Rr = \frac{1}{2}$ NB ; donc le centre de gravité du rectangle MANB eſt éloigné du côté AB de $\frac{1}{2}$ NB $= \frac{1}{2} b$; donc le rayon du cercle que décrit ce centre de gravité $= \frac{1}{2} b$.

2°. Puiſque 7 : 44 :: le rayon du cercle : à ſa circonférence, l'on dira, pour avoir la route du centre de gravité du rectangle MANB, 7 : 44 :: $\frac{1}{2} b$: $\frac{22\,b}{7}$; donc la circonférence du cercle que décrit ce centre de gravité ſera $= \frac{22\,b}{7}$.

3°. La ſurface du rectangle MANB $= a\,b$; donc la

ſolidité du cylindre CADB, par ce théorême même, ſera $= ab \times \frac{22\,b}{7} = \frac{22abb}{7}$.

4°. Suivant les éléments de Géométrie (art. 709), la ſolidité du cylindre CADB eſt égale au produit de la hauteur AB par la ſurface de la baſe DNB. Mais la hauteur $AB = a$, & la ſurface circulaire de la baſe DNB $= b \times \frac{22\,b}{7} = \frac{22\,bb}{7}$, parce que (élém. 602) la ſurface d'un cercle eſt égale au produit de ſon rayon par ſa demi-circonférence, & que $NB = b$ étant le rayon de la circonférence de la baſe DNB, cette circonférence eſt néceſſairement $= \frac{44\,b}{7}$; donc ſuivant les Éléments de Géométrie, la ſolidité du cylindre CADB $= a \times \frac{22\,bb}{7} = \frac{22\,abb}{7}$; donc l'article 395 de la Mécanique donne le même réſultat que l'article 709 des Eléments de Géométrie.

5°. Pour avoir par cette regle la ſurface du cylindre CADB, il faut conſidérer que cette ſurface a été produite par la rotation de la ligne AB qui ſe trouve à la diſtance NB de l'axe de révolution MN, ou, ce qui revient au même, a été produite par la rotation d'une ligne a à la diſtance b de l'axe de révolution. La route du centre de gravité r de la ligne AB eſt donc $\frac{44\,b}{7}$, parce que $7 : 44 :: b$, rayon du cercle que décrit le centre de gravité $r : \frac{44\,b}{7}$, circonférence de ce même cercle. Multiplions cette circonférence par la quantité génératrice a, nous aurons $\frac{44\,ab}{7}$ pour l'expreſſion de la ſurface du cylindre CADB; ce qui eſt conforme aux Eléments de Géométrie, où l'on lit (art. 690) que la ſurface d'un cylindre droit eſt égale au produit de ſon axe par le contour d'une de ſes baſes. Voilà pour ce qui regarde l'article 395.

Il n'eſt rien à ajouter aux articles 396 & 397. L'article 398 ſera auſſi clair que les deux précédents, lorſqu'on aura corrigé la faute, ou d'inadvertance, ou d'impreſſion qui s'y eſt gliſſée. C'eſt autour du point *d* & non pas autour du point *a* que devroit ſe décrire l'arc qui auroit pour rayon *c d*, *fig. 58 pl. 4*.

Ne pourroit-on pas dire, pour rendre plus clair l'article 399, que le polyhédre C trébuchera ſur la face B H, *fig. 58 pl. 4*, en ſuivant à-peu-près la direction C K, parce qu'il conſerve la force repréſentée par C F, & que le frottement qui le retient ſur le plan A B, équivaut à une force qui le pouſſeroit ſuivant la ligne C E? En effet le frottement eſt cauſe (art. 325) que les petites pointes dont la face B E eſt hériſſée, entrent dans les cavités du plan ſur lequel eſt poſé le corps C, & réciproquement; donc le frottement qui retient le corps C ſur le plan A B, équivaut à une force qui le pouſſeroit ſuivant la ligne C E.

La ſcholie de l'article 400 eſt de la derniere évidence.

Il me paroît que l'article 401 ſeroit beaucoup plus clair, ſi l'on diſoit que le corps C, *fig. 59 pl. 4*, pouſſé de H en N par la puiſſance R, & de H en L par la gravité, ſuivra la direction H M, & culbutera par conſéquent ſur la face A B.

Le renvoi à l'article 499 eſt apparemment une faute d'impreſſion, ce renvoi doit ſe faire à l'article 399.

L'article 402 eſt très facile pour quiconque ſe rappelle que la ſphere ne touche le plan qu'en un point, & que la perpendiculaire au plan paſſe non-ſeulement par le point de contact, mais encore par le centre de la ſphere, lequel centre eſt confondu avec ſon centre de gravité.

L'article 403 peut s'appliquer à une foule de cas dont l'Abbé de la Caille ne fait pas mention. C'eſt du principe énoncé dans cet article qu'on conclut qu'on ne ſauroit, ſans une adreſſe infinie, marcher ou ſur une corde, ou ſur une planche très-étroite, parce que les hommes ayant leur centre de gravité vers le milieu de leur corps, il eſt alors très-aiſé que leur ligne de direction paſſe hors de leur baſe.

De ce même principe on conclut encore qu'un cheval qui galope, doit lever en même-tems un pied de devant & un pied de derriere ; qu'un vieillard courbé ſous le poids des années, doit ſe ſervir d'un bâton ; qu'un enfant qui ſautille ſur un pied, doit être extrêmement ſur ſes gardes ; ſans cela leur ligne de direction paſſeroit hors de leur baſe, & l'on verroit le cheval s'abattre, le vieillard donner du nez en terre, & l'enfant payer ſa ſotiſe par une chûte inévitable.

Ici finit, Monſieur, la ſeconde partie de la Mécanique de l'Abbé de la Caille. Je vais entreprendre inceſſamment la lecture, ou plutôt l'étude de la troiſieme partie de ce bel ouvrage. Comme elle roule ſur les mouvements en ligne courbe, & que je prévois que cette matiere eſt des plus épineuſes, je vous demande la continuation de vos bontés, & je vous prie de me croire, &c.

RÉPONSE.

JE n'ai rien à ajouter, Monſieur, aux ſcholies dont vous me parlez dans votre lettre. Un homme en état de faire les remarques que vous venez de me communiquer, n'a beſoin du ſecours de perſonne pour appliquer ces ſcholies à un nombre quelconque de corps. Il peut auſſi ſuivre ſans peine l'Abbé de la Caille dans tout ce qu'il va dire ſur les mouvements en ligne courbe. Comme cependant cette matiere eſt toute neuve pour vous, vous me trouverez toujours prêt à éclaircir vos doutes, & à vous donner des preuves de l'attachement ſincere avec lequel je ſuis, &c.

LETTRE DIX-SEPTIEME.

Remarques sur les articles 416, 420, 428, 429, 431, 433, 440, 442 & 443.

IL faut que l'Abbé de la Caille ait l'esprit bien net, Monsieur, pour avoir présenté d'une maniere aussi claire ce qu'il dit dans la troisieme partie de sa Mécanique sur la théorie des mouvements en ligne courbe. J'ai saisi à la premiere lecture toutes les vérités compriſes entre les articles 404 & 415. L'article 416 ne présente aucune difficulté réelle à quiconque prend garde qu'une quantité infiniment petite (Elém. 355) jointe ou séparée d'une quantité finie, se peut négliger dans le calcul, & qu'ainsi $a \pm \frac{1}{\infty} = a$. Il faudra encore se rappeller pour l'intelligence de cet article que si AB : IB :: IB : 1, l'on aura $1 \times AB = IB^2$; donc $AB = \frac{IB^2}{1}$. Donc $AB = IB^2$. L'on aura par la même méthode $AC = FC^2$ &c. *fig. 65 pl. 4.*

Les articles 417 & 418 sont des conséquences nécessaires de l'article 416; ils n'ont par conséquent besoin d'aucun commentaire.

L'article 419 est bien. L'article 420 est assez inutile, après ce qui a été dit à l'article 409. La concavité de la courbe décrite est toujours du côté du point fixe, ou du centre auquel tend continuellement l'une des deux forces dont le mobile est agité.

L'article 421 est très clair, lorsqu'on se rappelle les vérités démontrées aux articles 407, 405 & 44.

Les premieres définitions du calcul intégral suffisent pour comprendre l'article 422. Il faut aussi que le lecteur ait présent à l'esprit l'article 49 de ce traité de Mécanique.

Ce que dit l'Abbé de la Caille au commencement de ce même Traité sur le mouvement rectiligne réel, simple

& uniforme, conduit à l'intelligence des articles 423 & 424. Que l'on ſe rappelle cependant en particulier les articles 34 & 44.

Pour ce qui regarde les vérités compriſes entre les articles 425 & 443, on peut dire qu'elles ſont en même-tems faciles & difficiles ; difficiles en elles-mêmes, faciles pour ceux qui ont étudié le Traité des Sections Coniques que l'Abbé de la Caille nous a donné dans ſes Leçons Elémentaires de Mathématiques. Qui ne voit pas en effet que l'équation à la parabole étant $yy = px$, on en conclut que $p = \frac{yy}{x}$? Or cette derniere équation eſt l'expreſſion algébrique de celle-ci $P = \frac{CE^2}{EL}$ que nous liſons à l'article 428, parce que $CE = y$, & $EL = x$, *fig. 68 pl. 4.*

Je ne ſuis rien moins que content de la démonſtration de l'article 429 ; il me paroît qu'on doit lui préférer la ſuivante. Je ſuppoſe que le corps C, *fig. 70 pl. 4* ſoit pouſſé ſuivant la ligne CA avec deux degrés de vîteſſe, dont chacun ſoit capable de lui faire parcourir uniformément 30 pieds à chaque ſeconde de tems. Je ſuppoſe encore que la verticale B C ait 60 pieds de longueur. Cela ſuppoſé, voici comment je raiſonne.

Si le corps C deſcendoit librement en vertu de ſa peſanteur, il parcourroit d'un mouvement uniformément accéléré en 2 ſecondes de tems la verticale B C ; & arrivé au point C, il auroit acquis 2 degrés de vîteſſe dont chacun ſeroit capable de lui faire parcourir uniformément 30 pieds à chaque ſeconde de tems, comme il eſt démontré aux articles 90 & ſuivants. Il eſt encore ſûr que ſi le corps C étoit pouſſé perpendiculairement en haut avec la vîteſſe qu'il a acquiſe en deſcendant, il remonteroit de C en B en 2 ſecondes de tems avec un mouvement uniformément retardé ; donc de quelque maniere qu'un corps décrive une parabole, la force qui le pouſſe uniformément peut être exprimée par une ligne C B verticale, égale à la hauteur où il ſeroit monté, ſi cette même force l'avoit pouſſé perpendiculairement en haut.

L'article 430 contient le plus clair & le plus ſimple de tous les calculs ; il n'a par conſéquent beſoin d'aucun commentaire.

L'article 431 ſuppoſe la connoiſſance des articles 781 & 816 du Traité des Sections Coniques. Cette connoiſſance une fois ſuppoſée, voici comment je raiſonne : dans la parabole C S N, *fig. 70 pl. 4*, le point S eſt le ſommet de la parabole & par-là même l'origine de l'axe principal ; le point F en eſt le foyer, & le point C l'origine du diametre C I. Or la diſtance du point S à la directrice : à la diſtance du point S au foyer de la parabole :: la diſtance du point C à la même directrice : à la diſtance du point C au même foyer ; parce que la diſtance de l'origine de l'axe principal à la directrice : à la diſtance de la même origine au foyer de la parabole : : la diſtance de l'origine d'un diametre quelconque C I à la même directrice : à la diſtance de la même origine au même foyer. Mais la diſtance de l'origine S de l'axe principal à la directrice eſt le quart du parametre de cet axe ; donc la diſtance de l'origine C d'un diametre quelconque C I à la directrice doit être le quart du parametre de ce diametre. Mais on vient de démontrer que la verticale C B eſt le quart du parametre du diametre C I ; donc la verticale C B eſt la diſtance du point C à la directrice de la parabole C S N.

L'on peut, ſans le ſecours de l'article 432, démontrer l'article 433 d'une maniere beaucoup plus claire. En effet plus la force du jet ſera grande, plus auſſi la verticale C B aura de longueur ; plus la verticale C B aura de longueur, plus auſſi le ſommet S de la parabole C S N ſera éloigné de la directrice B T ; plus le ſommet S ſera éloigné de la directrice B T, plus auſſi le foyer de la parabole C S N ſera éloigné du ſommet S, parce que la parabole eſt une ligne telle que les deux diſtances de chacun de ſes points, l'une à la directrice & l'autre au foyer, ſont égales entr'elles ; donc le foyer de la parabole ſera d'autant plus éloigné de ſon ſommet, que la force du jet ſera plus grande

grande par rapport à celle de la peſanteur ; & c'eſt-là la premiere partie de l'article 433.

L'on aſſure dans la ſeconde partie de cet article que la direction du jet faiſant un angle avec celle de la peſanteur, le foyer de la parabole ſera d'autant plus éloigné de ſon ſommet, que l'angle formé par les directions de ces deux forces approchera plus d'être droit. En effet ſi la ligne CA faiſoit un angle droit avec la ligne CI, le point C (426) ſeroit le ſommet de la parabole, & par-là même la diſtance de ce ſommet au foyer ſeroit CB, tandis que dans la poſition où eſt CA vis-à-vis CI, la diſtance du ſommet S au foyer de la parabole, eſt égale à la diſtance du ſommet S à la directrice BT; donc le foyer de la parabole ſera d'autant plus éloigné de ſon ſommet, que l'angle formé par les directions de ces deux forces approchera plus d'être droit.

Je ne vois pas ce qui pourroit arrêter le lecteur dans la ſolution du problême de l'article 434, & dans les 4 corollaires qui en dépendent, en ſuppoſant qu'il ait préſentes à l'eſprit les vérités démontrées dans les articles auxquels l'Auteur a ſoin de le renvoyer.

Il en eſt de même du problême propoſé à l'article 439. Que l'on ſe rappelle ſur-tout que HE, *fig. 71, 72 pl. 4* ne peut pas être la ſoutangente de CH, ſans être double de l'abſciſſe qui correſpond à l'ordonnée CE; donc SE eſt l'abſciſſe en queſtion; donc S eſt le ſommet que l'on cherche.

Ce à quoi il faut s'attacher en liſant l'article 440, c'eſt de bien ſe perſuader que le point E, *fig. 71 pl. 4*, eſt préciſément entre C & B. En effet la parabole dont il s'agit dans cet article, a pour ſommet le point S, la ligne SE pour axe, & de ſes deux branches l'une paſſe par le point C & l'autre par le point B; donc CB eſt une double ordonnée à l'axe SE; donc le point E eſt préciſément entre C & B.

Maintenant à cauſe des triangles ſemblables CHE, CAB, l'on dira CE : CB :: HE : AB; mais $CE = \frac{1}{2} CB$;

donc $HE = \frac{1}{2}AB$; donc $\frac{1}{2}HE = \frac{1}{4}AB$; mais $SE = \frac{1}{2}HE$; donc $SE = \frac{1}{4}AB$.

On prouvera par un raiſonnement ſemblable que lorſque l'angle de 45 degrés NCM eſt l'angle de projection, & le point M la poſition du but, la hauteur à laquelle le corps s'élévera ſera le $\frac{1}{4}$ de NM, & par conſéquent le $\frac{1}{8}$ du parametre CP. L'article 441 n'a pas donc beſoin de commentaire.

Il en eſt de même de l'article 442, pourvu qu'on ſe rappelle que le dernier des trois renvois regarde l'article 465 & non pas l'article 438 des Eléments de Géométrie.

L'article 443 ſuppoſe qu'on a préſente à l'eſprit la propoſition démontrée à l'article 726 des Eléments de Trigonométrie.

Pour les remarques que fait l'Abbé de la Caille depuis l'article 444 juſqu'à l'article 450, elles me paroiſſent avoir beſoin d'un ample commentaire. Je vous prie d'y travailler & de m'en faire part. J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE.

CE n'eſt pas ſeulement, Monſieur, d'un ample commentaire, c'eſt d'un traité dans toutes les formes ſur les mouvements circulaire & elliptique, qu'ont beſoin les remarques dont vous me parlez à la fin de votre lettre. Je vais y travailler à tête repoſée; & lorſque j'y aurai mis la derniere main, vous ſerez, je vous l'aſſure, le premier à qui je le communiquerai. Vous pouvez, en attendant, continuer l'étude de la Mécanique de l'Abbé de la Caille. Le Traité que je vous annonce, ſera comme le ſupplément à ce que nous a dit cet Auteur dans ſa troiſieme partie ſur la nature & les propriétés du mouvement en ligne courbe. J'attens avec une eſpece d'impatience le compte que vous ne manquerez pas de me rendre des propoſitions compriſes entre les articles 451 & 488. Je ſouhaite qu'il reſſemble à celui qui fait la matiere de la lettre que je viens de rece-

voir de vous ; ce ſera une preuve non équivoque que vous pouvez, ſans le ſecours de perſonne, faire les plus grands progrès dans l'étude des Mathématiques. J'ai l'honneur d'être, &c.

LETTRE DIX-HUITIEME.

Remarques ſur les articles 451, 453, & 459.

VOus avez trop bonne opinion de moi, lorſque vous ſuppoſez que je pourrai, ſans le ſecours de perſonne, me tirer des propoſitions compriſes entre les articles 451 & 488. Il s'en faut bien, Monſieur, que j'aie été auſſi avant dans l'étude de la Mécanique. Dès l'article 464 j'ai été arrêté dans ma courſe. Auſſi compté-je ſur votre ſecours pour comprendre les vérités que renferment les 23 derniers des articles que vous m'avez indiqués dans votre lettre ; c'eſt beaucoup que deux lectures conſécutives m'aient mis au fait des 13 premiers. Voici les réflexions que j'ai faites en les étudiant.

1°. Si je n'avois pas ſu d'ailleurs ce qu'il faut entendre par *inertie* & par *gravité* ou *poids* des corps, l'article 451 ne m'auroit gueres mis au fait de cette matiere ; mais avant que de lire cet article, je ſavois déja que tout corps, conſidéré préciſément comme corps, eſt eſſentiellement indifférent au repos ou au mouvement. L'effet néceſſaire de cette indifférence eſt de faire perſévérer le corps dans l'état où il ſe trouve. En effet ſi un corps en repos exigeoit le mouvement, ou ſi un corps en mouvement exigeoit le repos, il ne ſeroit plus indifférent au repos ou au mouvement. D'ailleurs tout corps eſt eſſentiellement paſſif, & par conſéquent eſſentiellement incapable de paſſer par lui-même d'un état à un autre ; il a donc de l'inertie ; & cette inertie eſt non-ſeulement fondée ſur l'indifférence dont je viens de parler, mais encore ſur l'inactivité eſſentielle à toute eſpece de corps. Je n'ai pas donc été ſurpris d'entendre dire à

l'Abbé de la Caille que l'inertie eſt une qualité invariable & inhérente à la maſſe. Il a encore eu raiſon d'aſſurer que cette qualité eſt toujours proportionnelle à la maſſe du corps, ou à la ſomme des molécules égales dont la maſſe eſt compoſée. L'expérience journaliere nous apprend que la réſiſtance qu'oppoſe au mouvement un corps de 20 liv. eſt double de celle qu'oppoſe un corps de 10 livres, lorſque ces deux corps ſont en repos : il en eſt de même de la réſiſtance qu'ils oppoſent au repos, lorſqu'ils ſont en mouvement, ſuppoſé qu'ils ſe meuvent préciſément avec la même vîteſſe, & qu'ils aient préciſément la même figure.

Pour la gravité, celle, par exemple, des corps ſublunaires, elle conſiſte dans une vîteſſe que ces corps reçoivent pour tendre continuellement vers le centre de la terre. Cette force leur eſt ſi extrinſéque, que Newton a démontré qu'un corps qui peſe trente-ſix quintaux, lorſqu'il ſe trouve aux environs de notre globe, ne peſeroit qu'une livre, s'il en étoit auſſi éloigné que la Lune. Rien donc n'eſt plus inconteſtable, que ce qu'avance l'Abbé de la Caille, lorſqu'il dit que la gravité n'eſt qu'une qualité accidentelle, & que les poids décroiſſent, ſelon que les corps s'éloignent du point vers lequel la peſanteur les porte.

Vous voyez par ce détail, Monſieur, que j'ai compris ſans peine l'article 451. Je vous avouerai cependant que je lirois avec plaiſir une diſſertation de votre façon ſur les forces d'inertie & de gravité ; ne pourriez-vous pas la donner, en forme de ſupplément, à la fin de ce commentaire ?

2°. L'article 452 ſe comprend aiſément. L'article 453 ne préſente aucune difficulté réelle. Le même coup de mail appliqué ſucceſſivement à la boule A d'une livre, & à la boule B de deux livres, fera aller celle-là une fois plus vîte que celle-ci : de même la force F doit communiquer plus de vîteſſe à la portion AEB, qu'à la portion ADB de la maſſe AEBD, *fig. 73 pl. 5*, puiſque celle-ci a plus de maſſe que celle-là. L'article 454 ne peut embarraſſer que ceux qui n'auroient pas préſentes à l'eſprit

les vérités déja démontrées dans ce traité de Mécanique.

3°. L'article 455 eſt une eſpece d'introduction aux huit ſuivants. De ces 8 articles les trois premiers ſe comprennent ſans peine. La fin de l'article 459, ſans préſenter aucune difficulté réelle, fait cependant quelque peine aux commençans. Ils ne comprennent pas d'abord comment il peut arriver que aD, *fig. 75 pl. 5*, ſoit aſſignée pour différence entre aA & bB. Mais pour guérir leur imagination, qu'ils ſe rappellent que les mouvements des points A & B de la verge AB ſe faiſant en ſens contraire, & le mouvement du point A étant repréſenté par $+Aa$, celui du point B doit être repréſenté par $-Bb$: qu'ils ſe rappellent encore que chercher la différence entre $+Aa$ & $-Bb$, c'eſt ſouſtraire $-Bb$ de $+Aa$: qu'ils ſe rappellent enfin l'article 140 des Elémens d'Algébre qui dit que *la ſouſtraction ſe fait en écrivant à la ſuite de la quantité donnée, celle qu'on veut ſouſtraire, après en avoir changé les ſignes + en — & les ſignes — en +*; donc la différence de $+Aa-Bb$ eſt $+Aa+Bb$ ou aD.

Les articles 460, 461, 462 & 463, ſont compoſés avec beaucoup de ſoin. On s'imagine à la premiere lecture qu'ils ont beſoin de commentaire; mais on comprend, après les avoir lus trois à quatre fois, qu'un commentaire ne ſerviroit qu'à les rendre plus obſcurs.

Pour ce qui regarde les 23 articles ſuivants, je vous ai déja annoncé que j'avois beſoin de votre ſecours pour les comprendre. J'attens donc avec impatience votre réponſe, & je vous prie de me croire, &c.

RÉPONSE.

Commentaire des articles 464, 465, 468, 470, 471, 475, 476, 483, 484 & 487.

J'En conviens, Monſieur; les 23 articles dont vous me parlez dans votre lettre, ſont beaucoup plus difficiles que les 13 qui les précédent. Il me paroît cependant

qu'avec un peu de patience, vous ſeriez venu à bout de les comprendre ſans le ſecours de perſonne; vous en avez commenté pluſieurs qui ſont beaucoup plus embrouillés que ceux-ci. Entrons-ici dans le détail, & vous ſerez forcé de convenir que j'ai raiſon.

Et d'abord le théorême de l'article 464 eſt très bien expoſé. La démonſtration, je l'avoue, en eſt un peu longue; mais examinée dans le détail, &, pour ainſi dire, piece par piece, elle porte l'empreinte de ſon Auteur. En effet le *moment* de chacune des parties de la verge à l'égard du point G, *fig. 77, 78 pl. 5*, y eſt très bien déterminé. L'Abbé de la Caille ſuppoſe avec raiſon que tout lecteur ſait que deux arcs de cercle ſont entr'eux comme leurs deux rayons. Il ſuppoſe encore qu'on conſidere toutes les molécules qui compoſent la verge A B, comme placées à leur centre de gravité C; ce qui lui donne lieu de conclure que la ſomme des produits de chaque molécule par ſa diſtance au point B eſt égale au produit de la verge entiere A B par la diſtance C B de ſon centre de gravité C au point B; cette ſomme eſt donc égale à $AB \times CB = AB \times \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB^2$. Mais l'Abbé de la Caille démontre fort clairement que $\frac{1}{2} AB^2$ repréſente la ſurface du triangle rectangle A B S; donc cette ſurface repréſente la ſomme des produits de chaque molécule de la verge A B par ſa diſtance au point B; donc la ligne E H qui occupe la partie de cette ſurface qui répond à la molécule E repréſente le produit de cette molécule par ſa diſtance au point B.

Par la même raiſon la ligne E W repréſente le produit de la molécule E par la diſtance B G. La remarque que fait à cette occaſion l'Abbé de la Caille doit ſauter aux yeux de tout le monde. Dans la figure 77 de la planche 5 le rectangle A N B K doit être placé à l'oppoſite du triangle S A B, puiſque la ſomme des produits de toutes les molécules qui compoſent la verge A B par leur diſtance au point G, eſt repréſentée par la ſurface du triangle S A B + la ſurface du rectangle A N K B. Mais comme dans la

figure 78 de la même planche la ſomme des produits des molécules qui compoſent la verge AB, eſt repréſentée par la ſurface du triangle SAB — la ſurface du rectangle ANKB, il n'eſt pas étonnant que dans cette derniere figure ce rectangle ſoit placé du même côté que le triangle.

La ſuite de la démonſtration eſt très claire, lorſqu'on ne l'applique qu'à la figure 77 de la planche 5 de la Mécanique, pourvu qu'on ait préſents à l'eſprit les articles des Éléments de Mathématiques auxquels l'Auteur a ſoin de renvoyer. Cependant comme l'article 557 ne dit pas préciſément que rQ : QZ :: RP : PC, donnons-en ici la démonſtration dans les formes, & ajoutons pour cela la lettre *a* au point d'interſection des lignes DO, AB.

Les triangles r*a*R & Q*a*P ſont évidemment équiangles ; donc r*a* : Q*a* :: R*a* : P*a* ; donc r*a* — Q*a* : Q*a* :: R*a* — P*a* : P*a* ; donc rQ : Q*a* :: RP : P*a*. Mais QZ : Q*a* :: PC : P*a*, comme on va le démontrer ; donc rQ : QZ :: RP : PC. Il ne s'agit donc que de démontrer que QZ : Q*a* :: PC : P*a*.

Les deux triangles Q*a*P, Z*a*C ſont évidemment équiangles ; donc Q*a* : Z*a* :: P*a* : C*a* ; donc Q*a* — Z*a* : Q*a* :: P*a* — C*a* : P*a* ; donc QZ : Q*a* :: PC : P*a*.

Voilà comment il faut procéder, lorſqu'on veut ſe ſervir de l'article 557 pour démontrer que rQ : QZ :: RP : PC. Il eût été plus ſimple, ſans renvoyer à cet article, de faire remarquer que les lignes rR, QP & ZC étant paralleles, l'on a néceſſairement la proportion qu'on vient d'indiquer.

Par la même raiſon, l'on aura la même proportion dans la figure 78 de la planche 5 de la Mécanique. En effet à cauſe des paralleles QP, rR & ZC l'on a rQ : rZ :: RP : RC ; donc rQ : rQ + rZ :: RP : RP + RC ; donc rQ : QZ :: RP : PC.

Il faut encore remarquer que dans la figure 77 la ligne FQI repréſente un levier de la premiere eſpece, dont le point d'appui Q eſt par conſéquent entre le poids F & I,

ou $\frac{1}{2}AB^2$ & $AB \times BG$. Dans ce levier le bras QI l'emporte autant ſur le bras QF, que $\frac{1}{2}AB^2$ l'emporte ſur $AB \times BG$; donc les bras FQ & QI ſont en raiſon inverſe des poids ſuſpendus à leurs extrêmités; donc $FQ : QI :: AB \times BG : \frac{1}{2}AB^2$.

Il faut enfin remarquer que dans la figure 78 la ligne QFI repréſente un levier de la ſeconde eſpece dont le point d'appui eſt à l'extrêmité Q, & dont les 2 poids ſe trouvent aux points F, I, le poids $\frac{1}{2}AB^2$ au point F, & le poids $AB \times BG$ au point I; l'on a donc encore par la propriété du levier la proportion ſuivante $FQ : QI :: AB \times BG : \frac{1}{2}AB^2$. Avec pareils éclairciſſements la démonſtration des articles 464 & 465 doit être à la portée de tout le monde.

Des 5 corollaires que l'on tire de la démonſtration précédente, le premier & le ſecond ne demandent aucun commentaire. Le troiſieme eſt ſuſceptible de la démonſtration ſuivante. Lorſque le point de percuſſion eſt au point P de la verge PB, *fig. 20 pl. 7*, alors le centre de converſion eſt au point G de la même verge, de ſorte que $CG = \frac{1}{6}PB$ (467). Lorſque le point de percuſſion eſt au point p de la verge PB, de telle ſorte que $pC = \frac{1}{6}PB$, alors le centre de converſion eſt au point B de la même verge (466). Or $PC : pC :: CB : CG$, parce que $\frac{5}{6}PB : \frac{1}{6}PB :: \frac{1}{2}PB : \frac{1}{6}PB$. Mais ſi $PC : pC :: CB : CG$, il eſt évident que les différentes diſtances des points de percuſſion au centre de gravité, ſont toujours en raiſon inverſe des diſtances des centres de converſion correſpondants au centre de gravité; donc &c.

D'ailleurs $PC \times CG = \frac{1}{12}PB^2$, & $pC \times CB = \frac{1}{12}PB^2$ (464 & 465); donc $PC \times CG = pC \times CB$; donc $PC : pC :: CB : CG$; donc le corollaire qui fait la matiere de l'article 468 eſt inconteſtable.

Celui de l'article 469 ne préſente aucune difficulté. Il en eſt preſque de même du corollaire de l'article 470. Il eſt bien vrai que plus le point de percuſſion eſt éloigné du centre de gravité de la verge, plus ſon centre de con-

verſion s'approche du même centre de gravité ; mais il eſt vrai auſſi que ce point de percuſſion en étant auſſi éloigné qu'il puiſſe l'être, néanmoins alors le centre de converſion ſe trouve éloigné du centre de gravité de $\frac{1}{6}$ de la longueur de la verge (467) ; donc le corollaire de l'article 470 eſt inconteſtable.

Il ſe trouve à l'article 471 un raiſonnement qui a beſoin de commentaire, c'eſt le ſuivant. $CK = \frac{1}{CG}$. Mais $CG = \frac{1}{PC}$. Donc $CK = PC$, c'eſt-à-dire, CK eſt en raiſon inverſe de CG ; mais CG eſt en raiſon inverſe de PC ; donc CK eſt en raiſon directe de PC. Ce raiſonnement eſt auſſi concluant que celui-ci. La ſanté eſt en raiſon inverſe de la maladie ; mais la maladie eſt en raiſon inverſe de la bonne conſtitution des humeurs du corps ; donc la ſanté eſt en raiſon directe de la bonne conſtitution des humeurs du corps.

Le corollaire qui dépend de l'article 471 eſt de la derniere évidence.

Il n'eſt rien à ajouter aux articles 473 & 474 ; ce ſont des chefs-d'œuvre.

Le problême de l'article 475 eſt bien réſolu. Il n'eſt aucun changement à faire à cette ſolution, lorſqu'on ne l'applique qu'à la figure 79 de la Mécanique. Mais lorſqu'on l'applique à la figure 80 du même traité, il faut dire $CI = CL - CK$, parce que dans cette figure CK eſt ſuppoſé plus petit que CL. Il faudra donc dire par la même raiſon dans la ſuite de cette ſolution $\varphi : \varphi \pm f :: CD : CM = \frac{\varphi \pm f \times CD}{\varphi}$; ce qui donnera pour dernier réſultat $CH = \frac{(\varphi \pm f) \times CD \times \mu\varphi}{\varphi(\nu\varphi \pm mf)}$.

Il n'eſt pas néceſſaire de faire remarquer ici que les deux paralleles IM, LD donnent l'angle CIM égal à l'angle CLD, & l'angle CMI égal à l'angle CDL, & que par conſéquent CM eſt en même-tems tangente des deux premiers de ces angles, & cotangente des deux ſeconds.

Tout ce qui pourroit arrêter dans la lecture de l'article 476, c'eſt ce qui regarde AE. Mais cette difficulté eſt ſûrement nulle pour vous, Monſieur; je vois par votre derniere lettre que vous avez compris comment aD, *fig. 75 pl. 5*, étoit la différence de + A a & — B b. Or c'eſt ici préciſément le même cas, parce qu'il s'agit de mouvemens en ſens contraire.

L'article 477 ne préſente aucune difficulté réelle. Il en eſt de même des 5 articles ſuivans. Les 4 premiers contiennent des notions que tout lecteur attentif ne ſauroit manquer de ſaiſir; le cinquieme offre un théorême dont la démonſtration eſt de la derniere évidence.

Il n'eſt qu'une choſe difficile dans la démonſtration du théorême de l'article 483, c'eſt cette propoſition-ci : *la force accélératrice que reſſent le corps* B, *& qui le fait tourner autour du point* S, *eſt en raiſon inverſe du rayon des arcs décrits.* Pour mettre cette propoſition à la portée de tout le monde, je crois devoir poſer les principes ſuivans.

1°. La force accélératrice dont il s'agit, eſt une véritable force centrifuge, puiſqu'elle produit un mouvement circulaire dans le corps. L'Abbé de la Caille a donné une idée de la force centrifuge au commencement de la troiſieme partie de ſa Mécanique, & je vous aſſure, Monſieur, que c'eſt-là un des plus beaux endroits de ſon ouvrage.

2°. Tout corps qui décrit un cercle eſt animé d'une force centripete toujours égale à ſa force centrifuge (art. 409 & ſuivans.)

3°. La force centripete d'un corps qui ſe meut circulairement autour d'un point fixe, eſt égale au quarré de ſa vîteſſe diviſé par le diametre du cercle parcouru. Vous trouverez la démonſtration de cette propoſition fondamentale dans le Traité qui doit ſervir de ſupplément à la Mécanique de l'Abbé de la Caille, & que je vous ai promis dans ma réponſe à votre 17e. lettre.

Il ſuit de ce principe qu'en nommant μ la vîteſſe d'un

corps quelconque, & d le diametre du cercle qu'il décrit, l'on aura $\frac{uu}{d}$ pour l'expreſſion algébrique de ſes forces centripete & centrifuge.

4°. Deux corps égaux qui ſe meuvent dans deux cercles inégaux avec une égale vîteſſe, ont leur force centrifuge en raiſon inverſe des rayons des cercles qu'ils parcourent. Suppoſons, par exemple, que le corps A ſe meuve dans un cercle de 8, & le corps B dans un cercle de 4 pieds de diametre, chacun avec 6 degrés de vîteſſe; je dis que la force centrifuge du corps A : à la force centrifuge du corps B :: 4 : 8 :: 2 : 4. Pour démontrer cette propoſition dans toutes les formes & de la maniere la plus générale, nommons u la vîteſſe du corps A, D le diametre du cercle qu'il parcourt, R le rayon du même cercle; nommons auſſi u la vîteſſe du corps B, d le diametre du cercle qu'il parcourt, & r le rayon du même cercle; nommons enfin f la force centrifuge du corps A, & Φ celle du corps B. Les principes que nous venons de poſer nous donnent les équations ſuivantes.

$$f = \frac{uu}{D}$$
$$\Phi = \frac{uu}{d}$$
$$f : \Phi :: \frac{uu}{D} : \frac{uu}{d}$$
$$\frac{\Phi uu}{D} = \frac{fuu}{d}$$
$$\Phi uud = fuuD$$
$$\Phi d = fD$$
$$f : \Phi :: d : D$$
$$f : \Phi :: r : R$$
$$f : \Phi :: 2 : 4$$

Donc la force centrifuge du corps A : à la force centrifuge du corps B :: le rayon du cercle que parcourt le corps B : au rayon du cercle que le corps A parcourt, c'eſt-à-dire :: 2 : 4; donc deux corps égaux qui ſe meuvent dans deux cercles inégaux avec une égale vîteſſe, ont leur force

centrifuge en raiſon inverſe des rayons des cercles qu'ils parcourent ; donc l'Abbé de la Caille a eu raiſon d'avancer que la force accélératrice que reſſent le corps B, & qui le fait tourner autour du point S, eſt en raiſon inverſe du rayon des arcs décrits.

Cette démonſtration n'a preſque pas beſoin d'explication, Monſieur. La premiere & la ſeconde équations ſont fondées ſur le principe que j'ai poſé *num.* 3 ; & ces 2 équations donnent néceſſairement la proportion géométrique qui les ſuit. En effet ſi l'on a $8 = 4 + 4$, & $4 = 2 + 2$, l'on aura par-là même $8 : 4 :: 4 + 4 : 2 + 2$.

La propriété de la proportion géométrique a donné l'équation $\frac{\Phi u u}{D} = \frac{f u u}{d}$, laquelle multipliée en croix, ſuivant la regle ordinaire, a produit l'équation $\Phi u u d = f u u D$, & par conſéquent $\Phi d = f D$, en diviſant tout par $u u$.

Cette derniere équation décompoſée a donné la proportion $f : \Phi :: d : D$. Mais $d : D :: r : R$, parce que les diametres ſont comme les rayons ; donc $f : \Phi :: r : R :: 2 : 4$.

J'aurois pu, Monſieur, préſenter cette démonſtration d'une maniere plus abrégée en la maniere ſuivante.

$$f = \frac{u u}{D}$$

$$\Phi = \frac{u u}{d}$$

$$f : \Phi :: \frac{u u}{D} : \frac{u u}{d}$$

$$f : \Phi :: \frac{1}{D} : \frac{1}{d}$$

$$f : \Phi :: \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$$

$$f : \Phi :: \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2} :: 2 : 4.$$

De l'article 483 l'Abbé de la Caille tire 3 corollaires très-intéreſſants. Pour donner au premier toute la clarté dont il a beſoin, ſuppoſons un corps quelconque M tantôt au point B & tantôt au point C, *fig.* 81 *pl.* 5, & ſuppo-

ſons que dans ces deux cas la verge SA ſoit frappée au point A par un coup quelconque p. Lorſque le corps M ſera au point B, ſa force accélératrice f ſera $\frac{SA \times p}{SB^2 \times M}$. Mais par hypotheſe $M = \frac{1}{SB^2}$; donc l'on aura dans ce cas $f = \frac{SA \times p \times SB^2}{SB^4} = SA \times p$.

Lorſque le corps M ſera au point C, ſa force accélératrice f ſera $\frac{SA \times p}{SC^2 \times M}$. Mais par hypotheſe M devient $\frac{1}{SC^2}$; donc dans ce cas f deviendra $\frac{SA \times p \times SC^2}{SC^4} = SA \times p$; donc dans ces deux cas la force accélératrice f eſt conſtante; donc le corollaire de l'article 484 eſt inconteſtable.

Celui de l'article 485 ne demande aucun commentaire. Il en eſt de même du troiſieme, lorſqu'on a bien compris les 2 précédents.

Pour la remarque de l'article 487, elle ne ſuppoſe que les deux vérités ſuivantes : les arcs de cercle ſont comme leurs rayons.

Deux corps qui parcourent en tems égaux des eſpaces inégaux, ont leurs vîteſſes en raiſon directe des eſpaces parcourus.

Voilà, Monſieur, le commentaire que vous m'avez demandé. Donnez-moi ſouvent occaſion de vous prouver qu'il n'eſt perſonne qui ſoit plus ſincérement, &c.

LETTRE DIX-NEUVIEME.

Remarques ſur les articles 494, 496, 498, 500, 502, 503, 504 & 505.

LEs 18 articles qui regardent les pendules ſimples, ou la rotation des corps peſants autour d'un point fixe, ſont bien différents, Monſieur, de ceux que vous venez de commenter; ils ne contiennent preſque aucune difficulté,

& tout commençant doit les comprendre à la premiere lecture. Et d'abord les 7 premiers de ces articles préſentent les définitions les plus claires & les plus intelligibles. Celle de l'article 494 n'avoit pas beſoin, pour être conçue, d'être traitée ſi au long; tout le monde doit faire le raiſonnement ſuivant. Le pendule P, *fig. 83 pl. V de la Mécanique*, eſt-il tranſporté au point N, & eſt-il enſuite abandonné à lui-même? la peſanteur fait deſcendre ſon centre de gravité dans la ligne de direction, c'eſt-à-dire, dans la ligne C P perpendiculaire à la ſurface de la terre. Eſt-il arrivé à cette ligne? les degrés d'accélération qu'il a acquis en deſcendant, le font remonter juſqu'au point *n*. L'arc *n p* égal à l'arc P N eſt-il décrit? la peſanteur fait deſcendre le pendule P dans la ligne perpendiculaire C P, & les degrés d'accélération le font remonter au point N. Telle eſt la cauſe phyſique d'un mouvement que les ſeuls obſtacles empêchent d'être perpétuel.

Il n'eſt rien à ajouter à la démonſtration du théorême de l'article 495. Les deux corollaires qu'on en tire, ſont inconteſtables. Le premier cependant pourroit arrêter ceux qui ne ſe rappelleroient pas qu'une courbe quelconque eſt conſidérée par les géometres comme compoſée d'une infinité de plans infiniment petits, & infiniment peu inclinés les uns aux autres.

Il en eſt de même du théorême de l'article 498, & du corollaire qu'on en tire, pourvu qu'on ſoit bien convaincu que, dans les mouvements uniformément accélérés, les eſpaces parcourus ne peuvent pas être (art. 99) comme les quarrés des tems employés à les parcourir, ſans que les tems ſoient comme les racines quarrées de ces mêmes eſpaces. En effet ſi $T^2 : t^2 :: E : e$, l'on aura néceſſairement $T : t :: \sqrt{E} : \sqrt{e}$.

La démonſtration du théorême de l'article 500 ſeroit encore plus claire, ſi l'on faiſoit remarquer que dans ces ſortes de calculs l'on a coutume de faire le diametre B A $= 1$; donc $BF \times 1 = BK^2$; donc B F eſt comme BK^2.

La démonſtration du théorême de l'article 501 eſt de

la dernière évidence. Pour rendre encore plus pratiques les deux corollaires qu'on en tire, ſuppoſons que le pendule A ait 9 pieds de longueur, & qu'il ait 2 vibrations dans une minute; l'on demande combien en aura dans le même-tems le pendule B qui n'a que 1 pied de longueur. Pour le trouver, je dis 1 : 9 :: 4 : 36, c'eſt-à-dire, que 36 ſera le quarré du nombre des vibrations que donnera le pendule B dans une minute; donc dans une minute ce pendule donnera 6 vibrations.

Par la même raiſon l'on diroit pour trouver l'une des deux longueurs, en ſuppoſant que l'on connoiſſe les 2 quarrés des deux nombres des vibrations des pendules A & B; 4 : 36 :: 1 : 9, c'eſt-à-dire, que le pendule A qui ne donne que deux vibrations dans une minute, aura 9 pieds de longueur, s'il eſt vrai que le pendule B qui en donne 6 dans le même tems, n'ait que 1 pied de long.

L'on a ſuppoſé juſqu'a préſent une égalité parfaite dans la peſanteur qui anime les pendules dont on cherche ou la longueur, ou le nombre des vibrations dans un tems donné. L'on ne ſuppoſe pas cette égalité dans le théorême de l'article 504. Pour en ſaiſir la démonſtration, j'ai eu beſoin de me rappeller, Monſieur, que MN & *mn* marquant les eſpaces parcourus dans un tems donné par les poids P & *p*, l'on pouvoit faire MN = E, & *mn* = *e*. Or (art. 113) E = GTT, & *e* = *gtt*, parce que les G & *g* de l'article 504 ne différent pas des P & *p* de l'article 113; donc l'on dira SD : *ſd* :: DE : *de* :: MN : *mn* :: E : *e* :: GTT : *gtt* :: SP : *ſp* :: G : *g*; ce qui donne lieu de conclure que GTT : *gtt* :: G : *g*. Mais cette concluſion ſeroit ridicule, ſi l'on n'a pas TT = *tt*, c'eſt-à-dire, ſi le tems que met le poids P à parcourir MN n'eſt pas exactement égal à celui que met le poids *p* à parcourir *mn*; donc les pendules ſimples dont les longueurs SP, *ſp*, *fig. 85 pl. 5 de la Mécanique*, ſont comme les forces abſolues G, *g* des peſanteurs qui les animent, ſont iſochrones.

Suppoſons donc que les pendules A & B ſoient iſochrones. Suppoſons encore que le premier ait 2 pieds de long

& 4 de peſanteur, & que le ſecond ait 3 pieds de longueur; pour trouver la peſanteur dont il eſt animé, l'on dira 2 : 3 : : 4 : 6; c'eſt-à-dire, que la peſanteur qui animera le pendule B, ſera à la peſanteur du pendule A :: 6 : 4; & c'eſt-là le commentaire de l'article 505. Les 9 articles ſuivants regardent les pendules compoſés; je vous prie, Monſieur, d'en faire la matiere de la réponſe à cette lettre. J'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE.

Remarques ſur les articles 506, 510, 512, & 514.

J'Ai lu avec attention, Monſieur, les 9 articles qu'a donné l'Abbé de la Caille ſur les pendules compoſés. Ils paroiſſent à la premiere lecture plus difficiles qu'ils ne ſont dans la réalité. J'eſpere que les remarques que je vous envoie, ne contribueront pas peu à vous en faire comprendre toute la beauté.

1°. Un commençant qui examine la ſolution du problême de l'article 506, doit moins conſidérer la ligne A B, *fig. 87 pl. 5 de la Mécanique*, comme un pendule, que comme un levier de la premiere eſpece, dont le point d'appui S ſe trouve au milieu de cette ligne, & dont les extrêmités A & B ſont chargées de deux poids inégaux. Lorſqu'enſuite S A devient un pendule compoſé, chargé à ſon extrêmité A des deux maſſes A + B, le problême n'a plus de difficulté, puiſque $p \times SA$ ne peut pas être diviſé par la fraction $\frac{pA-pB}{A+B}$, ſans donner pour quotient $\frac{p \times SA \times A+B}{pA-pB}$ $= \frac{p \times SA \times A+B}{p \times A-B} = \frac{SA \times A+B}{A-B} = \left(\frac{A+B}{A-B}\right) \times SA.$

2°. Le problême de l'article 508 n'offre aucune difficulté réelle à ceux qui ont préſents à l'eſprit les articles auxquels on renvoie. Il n'en eſt pas ainſi des deux corollaires que l'on en tire. L'Abbé de la Caille auroit dû faire remarquer que le premier des deux n'eſt gueres que l'application de l'article

l'article 466. En effet il eſt démontré dans cet article que ſi la verge SD, *fig. 88 pl. V de la Mécanique*, eſt frappée à un point K, éloigné de l'extrêmité D de $\frac{1}{3}$ de ſa longueur, cette verge aura ſon centre de converſion au point S. Mais il eſt démontré dans l'article 510 que le centre d'oſcillation du pendule SD étant au point K éloigné de l'extrêmité D de $\frac{1}{3}$ de ſa longueur, le point de ſuſpenſion de ce pendule doit être au point S; donc dans une verge homogene & uniforme, le point de percuſſion eſt le même que le centre d'oſcillation, & le point de ſuſpenſion eſt le même que le centre de converſion. Tout cela ſuppoſe, ce qui eſt vrai, que la verge SD eſt compoſée d'une infinité de points peſants dont le premier eſt S & le dernier D.

La conſéquence que l'Abbé de la Caille tire de ce premier corollaire, doit ſe lire la plume à la main; elle eſt alors de la derniere évidence. Les premieres regles d'algebre apprennent à mettre — SB & + SA en fractions qui aient chacune pour dénominateur $SA \times A + SB \times B$.

3°. Le ſecond corollaire du problême de l'article 508 n'eſt pas à la portée de ceux qui n'ont aucune idée du calcul intégral. Mais lorſqu'on en fait les premiers éléments, l'on voit au premier coup d'œil que puiſque dans la parabole $yy = px$, & $yy = x$ en faiſant $p = 1$, l'on a néceſſairement $\frac{y x x dx}{y x dx} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \times x^{1} dx}{x^{\frac{1}{2}} \times x^{1} dx} = \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{1}{2}} dx}$.

L'intégrale de cette derniere fraction eſt $\frac{x^{\frac{1}{2}+1} dx}{\frac{1}{2}+1 x^{\frac{1}{2}+1} dx}$ $= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{2}} = \frac{2}{3} x = \frac{2}{3} A\pi$, *fig. 48 pl. 3 de la Mécanique.*

4°. Les réponſes aux deux queſtions ſuivantes mettront à la portée de tout le monde le problême de l'article 514.

Premiere queſtion. Comment peut-il ſe faire qu'en ſuppoſant SA = 1, $SB = \frac{2}{3} SA$, & $B = \frac{1}{10} A$, l'on ait $SK = \frac{47}{48}$, *fig. 90 pl. 5 de la Mécanique?*

Réponſe. En ſuppoſant $B = \frac{1}{10} A$, & en ſuppoſant $A = 10$, l'on aura $B = 1$; l'on aura donc $SA = 1$, $SB = \frac{2}{3}$, $A = 10$, & $B = 1$.

Tranſportons toutes ces valeurs dans la formule $SK = \frac{SA^2 \times A + SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B}$, l'on aura $SK = \frac{1 \times 10 + \frac{4}{3} \times 1}{1 \times 10 \times \frac{2}{3} \times 1} = \frac{10 + \frac{4}{3}}{10 + \frac{2}{3}} = \frac{94}{9}$ diviſé par $\frac{22}{3} = \frac{282}{288} = \frac{141}{144}$, parce que le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{282}{288}$ ont été diviſés par 2. Mais en diviſant par 3 le numérateur & le dénominateur de $\frac{141}{144}$, l'on trouve pour quotient $\frac{47}{48}$; donc les ſuppoſitions que fait l'Abbé de la Caille dans la ſolution du problême dont il s'agit, donnent $SK = \frac{47}{48}$.

Seconde queſtion. En faiſant les mêmes ſuppoſitions que dans la queſtion précédente, la formule $SK = \frac{9n \times SA + 4SA}{9n + 6}$ donne-t-elle $SK = \frac{47}{48}$?

Réponſe. La choſe eſt inconteſtable. En effet en faiſant les mêmes ſuppoſitions que dans la queſtion précédente, l'on a $n = 10$; donc l'on a $SK = \frac{90 \times 1 + 4 \times 1}{90 + 6} = \frac{94}{96} = \frac{47}{48}$, en diviſant par 2 le numérateur & le dénominateur de $\frac{94}{96}$.

Voilà, Monſieur, des éclairciſſements qui doivent mettre à la portée de tout le monde les 9 articles qui regardent les pendules compoſés. Vous pouvez ſans crainte entreprendre la lecture de ceux qui regardent le pendule ſimple dans la cycloïde, vous en ſavez plus qu'il n'en faut pour les comprendre ſans le ſecours de perſonne. Vous pouvez en tout cas toujours compter ſur celui qui ſera toute ſa vie, &c.

LETTRE VINGTIEME.

Remarques ſur les articles 519, 521, 522, 523, 524 & 525.

NOus voici enfin arrivés, Monſieur, au dernier chapitre de la Mécanique de l'Abbé de la Caille. La fin qu'il ſe propoſe dans ce chapitre, c'eſt de démontrer que les vibrations d'un même pendule dans la même cycloïde ſont toujours iſochrones, quelque grande ou quelque petite étendue qu'elles aient. Pour mettre ſon lecteur à même de ſaiſir cette importante vérité, il donne des définitions, il poſe des lemmes, il propoſe un problême & il met en avant pluſieurs théorêmes.

Ses définitions ſont à la portée de tout le monde, & ce ſeroit vouloir les obſcurcir, que de tenter de les commenter.

Il en eſt preſque de même du premier des deux lemmes. Il eſt bon cependant de remarquer que puiſque CH eſt perpendiculaire à CD, *fig. 93 pl. V de la Mécanique*, & puiſque CD eſt conſidéré comme un rayon qui, en tournant ſur le point D, eſt capable de décrire un cercle dont le point C ſeroit un arc infiniment petit, il ſuit évidemment (art. 461 des éléments) que CH eſt une tangente à cet arc. Elle eſt donc en même-tems tangente à la cycloïde au point C, car dans ce point l'arc de cycloïde eſt confondu avec un arc du cercle infiniment petit qui auroit CD pour rayon.

Le ſecond des deux lemmes n'eſt pas plus difficile que le premier, lorſqu'on eſt une fois bien convaincu que EN = MN. Pour s'en convaincre, il ne faut pas avoir recours à l'article 545 des Éléments, mais il faut conſidérer que EN eſt la tangente de l'arc EM, & MN la tangente de l'arc ME. Or EM = ME; donc EN = MN.

Si la corde EM eſt la moitié de l'arc de cycloïde LE, la corde EF ſera par-là même la moitié de l'arc de cycloïde

BE; donc le contour de la cycloïde eſt quadruple du diametre de ſon cercle générateur.

La démonſtration du problême de l'article 523, n'a beſoin, pour être compriſe, que d'avoir préſents à l'eſprit les articles qui y ſont cités. En effet le point P ſe trouve évidemment dans le plan du parallélogramme DKPH, *fig. 92 pl. V de la Mécanique.* Mais ce parallélogramme eſt évidemment dans le plan de la cycloïde AVB; donc le point P eſt évidemment dans le plan de la cycloïde AVB.

Les théorêmes des articles 524, 525 & 526 demandent d'être lus avec beaucoup d'attention. Pour bien comprendre le premier des trois, je me ſuis d'abord rappellé, Monſieur, la réponſe que vous fites à la troiſieme des lettres que j'ai eu l'honneur de vous écrire depuis que j'ai entrepris l'étude de la Mécanique. Il ſuit de cette réponſe que la vîteſſe acquiſe par un corps qui tombe librement en vertu de ſa peſanteur, eſt comme le tems qu'a duré ſa chûte. Mais il ſuit de cette même réponſe que l'eſpace que parcourt ce corps eſt comme le quarré du tems employé à le parcourir; donc cet eſpace eſt comme le quarré de la vîteſſe acquiſe, ou ce qui revient au même, donc la vîteſſe acquiſe à la fin de la chûte, eſt comme la racine quarrée de l'eſpace parcouru; donc l'Abbé de la Caille a eu raiſon d'avancer au commencement de l'article 524, que la vîteſſe en M, *fig. 92 pl. V de la Mécanique*, eſt comme $\sqrt{RS}$.

Je me ſuis enſuite bien convaincu que $RV \times VD = VO^2$. En effet les deux triangles rectangles DOV, VRO ſont ſemblables; donc $VD : VO :: VO : RV$; donc $RV \times VD = VO^2$. L'on a par la même raiſon $SV \times VD = VQ^2$, à cauſe des triangles rectangles ſemblables DQV, QSV.

Le théorême de l'article 525 ſuppoſe qu'on eſt bien convaincu que les tems employés à parcourir des eſpaces proportionnels aux vîteſſes, ſont égaux entr'eux. En effet nommons E l'eſpace parcouru dans le tems T avec la vîteſſe V, & e l'eſpace parcouru dans le tems t avec la vîteſſe u; je dis que ſi $E : e :: V : u$, l'on aura $T = t$. En voici la démonſtration.

$V = \frac{E}{T}$, & $u = \frac{e}{t}$ (art. 44); donc si $E : e :: V : u$, l'on aura $E : e :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; donc $\frac{Ee}{t} = \frac{Ee}{T}$; donc $EeT = Eet$. Mais cette derniere équation ſuppoſe $T = t$; donc les tems employés à parcourir des eſpaces proportionnels aux vîteſſes ſont égaux entr'eux.

Il me paroît au reſte, Monſieur, que la démonſtration de ce théorême eſt finie à ces mots, *or à cauſe*, &c.; tout le reſte eſt inutile.

Il n'eſt rien à ajouter à la démonſtration du théorême de l'article 526; & la vérité de ces trois théorêmes une fois ſuppoſée, l'article 527 ne contient plus aucune difficulté. Il n'en eſt pas ainſi de l'application & des uſages que l'Abbé de la Caille tire de la théorie précédente; il en eſt certains qu'il eſt néceſſaire de mettre à la portée du commun des lecteurs. Je vous demande cette derniere grace avec la même confiance que je vous ai demandé toutes les autres. Vous pouvez être aſſuré qu'il n'eſt que ma reconnoiſſance qui puiſſe l'emporter ſur l'attachement reſpectueux avec lequel j'ai l'honneur d'être, &c.

RÉPONSE.

Remarques ſur les articles 532 & 539.

DEs 13 derniers articles de la Mécanique de l'Abbé de la Caille, il n'eſt, Monſieur, que les 532e, & 539e, qui ne ſoient pas à la portée du commun des lecteurs. Il me paroît même qu'il doit s'être gliſſé une faute de calcul dans le premier des deux. Recommençons les opérations qui y ſont indiquées, & nous verrons qui des deux a raiſon, de l'Auteur ou du Commentateur. Ces fautes au reſte ne tirent pas à conſéquence, elles ſont de pure inattention, & elles échappent aux plus habiles calculateurs.

L'Abbé de la Caille assure d'abord que $\frac{285}{1000}$ est précisément la moitié de $\frac{57}{100}$. Il a raison. En effet la moitié de $\frac{57}{100} = \frac{57}{200}$. Mais $\frac{57}{200} = \frac{285}{1000}$, parce qu'en multipliant ces deux fractions en croix, l'on trouve $57000 = 57000$; donc, &c.

Il dit ensuite que le quarré de $19\frac{35}{355}$ est à 220, 285 lignes, comme le quarré de 60 tierces est à 2174, 128 lignes. Je crois que le dernier terme de cette proportion doit être 2196, 688 lignes. En voici le calcul.

Le quarré de $19\frac{35}{355} = 361\frac{1225}{126025} = \frac{45496250}{126025}$.

Le quarré de $60 = 3600$.

La proportion dont parle l'Abbé de la Caille est donc celle-ci. $\frac{45496250}{126025} : 220, 285 :: 3600 : x$.

Pour trouver la valeur de x, je multiplie 220, 285 par 3600, & j'ai pour produit 793026, 000. Je divise ce produit par $\frac{45496250}{126025}$, & le quotient me donne la valeur que je cherche. Or le quotient en question est $\frac{793026,000 \times 126025}{45496250} = \frac{99941101650,000}{45496250} = 2196,688$ lignes $= 15$ pieds 3 pouces & un peu plus d'une demi-ligne; donc le quatrieme terme de la proportion dont parle l'Abbé de la Caille à l'article 532, doit être 2196, 688 lignes, & non pas 2174, 128 lignes. Examinez cependant, Monsieur, si je ne me suis pas trompé dans mon calcul; il est assez long, pour qu'il puisse s'y être glissé quelque faute d'inattention.

Pour l'article 539, il demande, je le sais, un grand commentaire. Aussi fera-t-il partie du supplément que je vous ai promis de donner au traité de Mécanique que vous venez de lire avec tant d'attention: vous le recevrez au premier jour; & vous comprendrez par-là que rien ne me coûte, lorsqu'il s'agit de vous donner des preuves de l'attachement sincere avec lequel je serai toute ma vie, &c.

SUPPLÉMENT
AU TRAITÉ
DE MÉCANIQUE
DE M. L'ABBÉ DE LA CAILLE.

LIVRE SECOND.

INTRODUCTION.

L'Ouvrage de M. l'Abbé de la Caille, le commentaire que nous venons d'en donner, & le ſupplément que nous allons y ajouter, formeront un traité complet de Mécanique générale & particuliere. Auſſi dans ce ſupplément traiterons-nous *en grand* tous les points que M. l'Abbé de la Caille n'a fait qu'indiquer, bien réſolus de ne faire qu'indiquer ceux que cet Auteur a diſcuté dans les formes. Si quelqu'un donc veut apprendre dans toutes les regles ce qui regarde l'inertie des corps, les forces vives & mortes, les loix de l'attraction, les mouvements circulaire & elliptique, nous le renvoyons à notre ſupplément : pour tout le reſte, nous lui conſeillons de s'en tenir à M. l'Abbé de la Caille & à notre commentaire. Voilà pour ce qui regarde

la matiere du petit traité de Mécanique que nous allons donner au Public.

La forme de ce traité s'eſt d'abord préſentée à notre eſprit comme d'elle-même. Pour le rendre utile à un plus grand nombre de perſonnes, nous avons préféré la langue latine à la françoiſe, & la forme ſcholaſtique à un grand nombre d'autres dont nous aurions pu nous ſervir ſans inconvénient. Le latin a toujours été & ſera toujours la langue des ſavants de tous les tems & de tous les pays; & les mathématiciens méritent ce titre à bien plus juſte titre que les autres. Pour la forme ſcholaſtique, elle nous a paru la plus propre aux démonſtrations rigoureuſes, & à l'éclairciſſement des doutes qui font perdre un tems infini à ceux qui ne ſont pas encore conſommés dans l'étude des Mathématiques. Les matieres les plus utiles & les plus relevées ſont ſuſceptibles de cette forme; & une longue expérience nous a appris que les jeunes gens ne ſavent bien les queſtions de Phyſique & de Mathématique, que lorſqu'on les leur a ainſi préſentées. C'eſt donc toujours la faute des Profeſſeurs de Philoſophie, lorſque leurs éleves, au ſortir de leurs mains, n'ont la tête meublée que de pompeux riens, & de doctes fadaiſes. Nous ſouhaitons que ce traité de Mécanique leur ſoit de quelque utilité; nous avons fait notre poſſible, pour qu'il fût intéreſſant, clair & méthodique.

La plupart de ces réflexions, nous les avons déja faites dans l'ouvrage que nous avons donné au Public en l'année 1768, & que nous avons intitulé *l'Électricité ſoumiſe à un nouvel examen*. Ce qui lui a mérité le plus favorable de tous les accueils, c'eſt que cette grande queſtion de Phyſique y eſt d'abord traitée en françois & ſelon la méthode des plus célebres Académies de l'Europe; enſuite en latin & dans la forme purement ſcholaſtique. Nous avons ſuivi la même marche dans cet ouvrage; auſſi nous flattons-nous du même ſuccès avec d'autant plus de fondement, que nous ſommes aſſurés de l'utilité, j'ai preſque dit de l'abſolue néceſſité des choſes que nous avons diſcutées dans notre commentaire & dans ce ſupplément.

Comme ceux qui liront ce qui ſuit, ſont au fait des abbréviations philoſophiques, nous nous contenterons de dire que *Reſp. ad 1. conc. maj. & neg. min. ad 2. neg. ſeq. ad 3. diſt. ant.* ſignifie *Reſpondeo ad primum argumentum, concedo majorem & nego minorem; ad ſecundum, nego ſequelam; ad tertium, diſtinguo antecedens.* Nous avertirons auſſi que *neg. vel conc. c̃quam* ſignifie *nego vel concedo conſequentiam.* Nous dirons enfin que *diſt. c̃quens* ſignifie *diſtinguo conſequens.*

MECANICA.

NIhil eſt aliud Mecanica, quàm ſcientia motuum omnium qui, juxta leges ab Authore naturæ libenter conſtitutas, fieri poſſunt. Ut autem in re tanti momenti ordine quodam & certâ methodo procedamus, in capita duodecim dividemus noſtrum hunc Mecanicæ tractatum.

Comprehendet caput primum notiones & quæſtiones omnes præambulas quæ Mecanicæ candidatis videntur eſſe prorsùs neceſſariæ.

Enumerabimus in capite ſecundo regulas motûs in genere ſpectati.

Trademus in tertio regulas generales motûs centripeti.

Loquemur in capite quarto de motu compoſito per lineam rectam.

Determinabimus in capite quinto quomodo fiat motus per lineam curvam in genere ſpectatam.

Motus centrifugus, motus circularis & motus ellipticus erunt materia capitum ſexti, ſeptimi & octavi.

Aſſignabimus in capite nono regulas particulares motûs in conflictu corporum non elaſticorum ſervari ſolitas.

Exponemus in capite decimo leges quæ ſervantur in conflictu corporum elaſticorum.

De Machinis agemus in undecimo, & de reſiſtentiis in ultimo capite.

CAPUT I.

De Notionibus & Quæſtionibus ad Mecanicam præambulis.

Hæ ſunt notiones ad Mecanicam præambulæ. 1°. Motus eſt continua loci mutatio.

2°. Tria diſtinguuntur in motu, Mobile ſeu corpus quod movetur; ſpatium quod percurritur, ſeu linea quam Mobile deſcribit; tempus quo ſpatium à corpore percurritur.

3°. Velocitas corporis definitur correſpondentia quam corpus mobile intrà certum tempus diverſis ſpatiis habet. Itaque velocitas corporis A major erit velocitate corporis B, ſi intrà idem omninò tempus corpus A majus ſpatium percurrat, quàm corpus B.

Si quis igitur velocitatem alicujus corporis detegere voluerit, is dividendum habet ſpatium percurſum à corpore per tempus quod in illo ſpatio percurrendo fuit adhibitum. Vocetur itaque velocitas V, ſpatium S, tempus T; formula velocitatem exprimens erit $V = \frac{S}{T}$, hoc eſt, velocitas in genere ſpectata æqualis eſt ſpatio diviſo per tempus adhibitum ad ſpatium hoc percurrendum.

4°. Motus uniformis ille eſt quo corpus æqualia ſpatia æqualibus temporibus percurrit.

5°. Motus acceleratus ille eſt quo corpus majora continuò ſpatia temporibus æqualibus percurrit.

6°. Motus retardatus ille eſt quo corpus minora continuò ſpatia temporibus æqualibus percurrit. Corpora gravia decidunt per motum acceleratum, & aſcendunt per motum retardatum.

7°. Motus conſpirantes ſunt motus quorum directiones congruunt, & ad idem punctum tendunt. Tales ſunt motus duorum corporum quæ tendunt ad idem præciſè punctum orientale.

8°. Motus contrarii ſunt motus quorum directiones ſunt directè & diametraliter oppoſitæ. Tales ſunt motus duorum corporum quorum alterum tendit ad orientem, & alterum ad occidentem.

9°. Quantitas motûs corporis cujuſcumque exprimitur per productum ex mole & velocitate corporis. Exprimitur, *v. g.*, per numerum 8 quantitas motûs corporis A cujus moles eſt 2 librarum, & velocitas 4 graduum. Item repræſentatur per numerum 6 quantitas motûs corporis B cujus moles eſt 3 librarum, & velocitas 2 graduum.

At inquies. Quânam de causâ multiplicanda est moles corporis per velocitatem, ut habeatur quantitas motûs ipsius?

Resp. Quia scilicet nulla est pars in corpore moto quæ totalem non habeat corporis totius velocitatem. Hæ sunt notiones quæ passim recurrunt in qualibet parte Mecanicæ. Jam verò tradamus quæstiones quæ sunt ad eumdem Mecanicæ tractatum præambulæ.

QUÆSTIO I.

De inertiâ corporum.

NIhil est aliud inertia quàm renixus quo corpus quodlibet resistit præsentis sui statûs mutationi; seu meliùs, nihil est aliud inertia quàm proprietas quâ corpus, præcisè prout corpus, exigit perseverare in statu in quo reperitur. Eadem est inertia in corporibus sive motis, sive quiescentibus; tàm enim resistunt corpora ne transeant à quiete ad motum, quàm resistunt ne transeant à motu ad quietem. Sit igitur.

PROPOSITIO I.

Datur inertia in omnibus omninò corporibus.

Dem. Corpus, præcisè prout corpus, exigit perseverare in statu in quo reperitur, ergo datur inertia in omnibus omninò corporibus. Prob. ant. Corpus præcisè prout corpus indifferens est non solùm ad motum vel quietem, sed etiam ad quamcunque directionem, velocitatem & figuram; nam corpus præcisè prout corpus tantummodo trinam dimensionem in longum, latum & profundum exigit; ergo corpus præcisè prout corpus exigit perseverare in statu in quo reperitur, & consequenter datur inertia in omnibus omninò corporibus.

PROPOSITIO II.

Eſt inertia moli proportionalis.

Explic. prop. Suppono molem corporis A eſſe 4 librarum, & molem corporis B 2 tantummodò librarum, dico quod, ſi in duobus illis corporibus cætera omnia ſint paria, inertia corporis A erit duplò major quàm inertia corporis B.

Dem. Corpus A quieſcens duplò magis reſiſtit motui quàm corpus B : item corpus A in motu duplò magis reſiſtit quieti quàm corpus B ; ergo inertia corporis A duplò major eſt quàm inertia corporis B. Prob. ant. Experientiâ conſtat quòd vis adhibenda ad hoc ut corpus A tranſeat ex quiete ad motum debet eſſe duplò major, quàm vis adhibenda ad hoc ut corpus B quieſcens moveatur : item experientiâ conſtat quòd ſi corpus A & corpus B eamdem omnino velocitatem habeant, vis requiſita ad motum extinguendum in corpore A duplò major erit, quàm vis requiſita ad motum extinguendum in corpore B ; ergo corpus A quieſcens duplò magis reſiſtit motui quàm corpus B : item corpus A in motu duplò magis reſiſtit quieti, quàm corpus B.

Solvuntur argumenta oppoſita.

Obj. 1°. contra primam propoſitionem. Omnia corpora exigunt quietem ; ergo corpora non ſunt indifferentia ad motum vel quietem, & conſequenter inertiâ carent. Prob. ant. 1°. Corpora quieſcentia exigunt quietem : 2°. corpora quæ moventur, ad quietem per ſeipſa redeunt ; nam globus ligneus A, quantacunque velocitate donetur, tandem redit ad quietem ; ergo omnia corpora exigunt quietem.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. diſt. 1. partem ant. Corpora quieſcentia exigunt quietem prout quietem, neg. ant. ; exigunt quietem prout conjunctam cum perſeverantia in ſtatu præſenti, conc. ant. & neg. cquam. Inertia corporis A quieſcentis non reſiſtit motui prout motui, ſed reſiſtit

motui prout conjuncto cum ſtatûs præſentis mutatione; ſi enim hoc idem corpus A foret in motu, tàm ipſius inertia in hac altera hypotheſi reſiſteret quieti, quàm in hypotheſi priori motui reſiſtebat.

Item ad 2. diſt. 2. partem ant. Globus ligneus A, quantacumque velocitate donetur, tandem redit ad quietem propter obſtacula, conc. ant.; per ſeipſum, neg. ant. & c̃quam. Reſiſtentia aeris, & frictio partium contra partes cauſæ ſunt præcipuæ cur globus ligneus A ex motu tranſeat ad quietem. Et verò impoſſibile eſt globum hunc ligneum ſeparare moleculas aeris alias ab aliis, quin motum aliquem illis communicet, & conſequenter quin aliquid de ſuo motu deperdat. Pariter impoſſibile eſt eminentias globi ejuſdem lignei ingredi cavitates quæ reperiuntur in pavimento etiam lævigato, quin motus ejus paulatim minuatur, & conſequenter ſenſim ſine ſenſu deſtruatur; ergo propter obſtacula tantùm globus ligneus A redit ad quietem. Sed in ſpatio perfectè vacuo moveatur globus hic ligneus, cum duobus, *v. g.*, gradibus velocitatis, in æternum corpus hoc cum duobus gradibus velocitatis movebitur; neque enim datur in vacuo reſiſtentia aeris, neque datur frictio partium contra partes.

Inſt. 1°. Ex dictis ſequitur motum mecanicum perpetuum non eſſe quid chimerici; falſum c̃quens, ergo & ant. Prob. min. Irridentur Phyſici qui vitam & opes in quærendo motu perpetuo conſumunt; ergo falſum eſt quòd motus mecanicus perpetuus non ſit quid chimerici.

Reſp. ad 1. diſt. ſeq. Ex dictis ſequitur motum mecanicum perpetuum non eſſe quid chimerici in ſpatio perfectè vacuo, conc. ſeq.; in ſpatio non vacuo, neg. ſeq. & ſic diſt. min. neg. c̃quam. Imò quidem in ſpatio perfectè vacuo motus mecanicus perpetuus eſt quid maximè neceſſarii.

Ad 2. conc. ant. & diſt. c̃quens ut ſupra. Ideo irridentur Phyſici qui vitam & opes in quærendo motu perpetuo conſumunt, quia ſcilicet illum inquirunt in ſpatio non vacuo.

Inſt. 2°. Saltem ex dictis ſequitur dari poſſe in aliquo

corpore finito motum aliquem infinitum; falſ. c̃quens, ergo & ant. Prob. ſeq. Corpus ſemel in motu in ſpatio perfectè vacuo, in æternum ibi moveretur; ergo ex dictis ſequitur, &c.

Reſp. ad 1. diſt. ſeq. Ex dictis ſequitur dari poſſe in aliquo corpore finito motum aliquem infinitum in intenſitate, neg. ſeq.; infinitum in duratione, ſubdiſt. ſupponendo quòd corpus illud in æternum conſervetur à Deo in ſpatio vacuo, conc. ſeq.; ſecùs, neg. ſeq. & ſic diſt. min. nego c̃quam.

Ad 2. conc. ant. & diſt. c̃quens ut ſupra. Nullus eſt motus qui non poſſit augmentum aliquod accipere per acceſſum novi cujuſdam gradûs velocitatis; ergo nullus eſt motus qui poſſit eſſe infinitus in intenſitate.

Obj. 2°. Multa ſunt corpora quæ motum exigunt excluſivè ad quietem; ergo non datur inertia in omnibus omninò corporibus. Prob. ant. 1°. Corpora gravia ſibi derelicta deorſùm cadunt: 2°. ignis exigit motum vorticoſum & perturbatum; ergo multa ſunt corpora quæ motum exigunt excluſivè ad quietem.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. diſt. 1. partem ant. Corpora gravia ſibi derelicta deorſùm cadunt, & corpora ſunt gravia per ſeipſa & per virtutem ipſis intrinſecam, neg. ant. & corpora ſunt gravia propter cauſam ipſis extrinſecam, conc. ant. & neg. c̃quam. In quæſtione præſenti conſiderantur corpora præcisè prout corpora, non verò corpora prout gravia. Corpora præcisè prout corpora neque ſurſùm neque deorſùm tendunt, ac proinde non ſunt per ſe & ab intrinſeco gravia. Hæc dilucidabuntur inferiùs, ubi de motu centripeto.

Item ad 2. diſt. 2. partem ant. Ignis, præcisè prout corpus, exigit motum vorticoſum & perturbatum, nego ant. ignis prout ignis exigit motum vorticoſum & perturbatum, ſubdiſt. & ignis habet hunc motum à ſeipſo, neg. ant. & ignis habet hunc motum à cauſa extrinſeca, conc. ant. & neq. c̃quam. Ibi dixiſſe ſufficiat ignem, prout corpus, indifferentem eſſe ad motum vel ad quietem. Perpendere autem quænam ſit cauſa extrinſeca motûs quo

donatur ignea quæcumque materia, hoc non eſt hujus loci. Rem hanc totam enucleavimus pag. 258, 259 & 260 operis hujus, cui titulus eſt: *l'Électricité ſoumiſe à un nouvel examen.*

Quod dictum eſt de corporibus gravibus & de igne, hoc proportionaliter dicatur de corporibus elaſticis, quæ, ſi comprimantur, in priorem ſtatum quaſi ſponte ſeſe reſtituere videntur. Per ſe non ſunt elaſtica hujuſmodi corpora, ſed per cauſam ipſis extrinſecam.

Inſt. Multa corpora non ſunt indifferentia ad quamcumque figuram; ergo non datur inertia in omnibus omninò corporibus. Prob. ant. Rotæ curruum figuram circularem exigunt; ergo multa corpora, &c.

Reſ. ad 1. neg. ant. ad 2. diſt. ant. Rotæ curruum, prout rotæ, figuram circularem exigunt, conc. ant. Rotæ curruum, prout corpora, figuram circularem exigunt, neg. ant. & c̃quam. Hæc per ſe patent.

Obj. 3°. contra 2. propoſitionem. Vis vel minima tàm facilè movere poteſt molem omnium maximam, quàm molem omnium minimam; ergo inertia non eſt moli proportionalis. Prob. ant. ſupponamus in æquilibrio eſſe in ſpatio vacuo corpus centum librarum A & corpus centum librarum B. Supponamus etiam eſſe in æquilibrio in eodem ſpatio vacuo corpus unius libræ C & corpus unius libræ D; quo ſuppoſito, ſic argumentor: vis vel minima movebit horizontaliter non ſolùm duo corpora minora, ſed etiam duo corpora majora; ergò vis vel minima tàm facilè movere poteſt molem omnium maximam, quàm molem omnium minimam.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. admitto ſuppoſitionem & diſt. ant. Vis vel minima movebit horizontaliter non ſolùm duo corpora minora, ſed etiam duo corpora majora, & hæc duo corpora ſpatium æquale æquali tempore conficient, neg. ant.; & hæc duo corpora ſpatium diverſum æquali tempore conficient, conc. ant. & neg. c̃quam. Duo corpora minora ſpatium centies majus æquali tempore conficient, quàm duo copora majora; ergo inertia eſt moli proportionalis in omnibus omninò corporibus.

QUÆSTIO

QUÆSTIO SECUNDA.

De Menſurâ virium.

1°. VIs motrix eſt vis quæ motum aliquem producere poteſt.

2°. Ex viribus motricibus aliæ dicuntur vivæ, aliæ verò mortuæ. Vis motrix viva cum actuali motu conjungitur, vis autem mortua tendentiam dumtaxat dicit ad motum actualem. Vim vivam agnoſcimus in corpore gravi in terram accelerato motu decidente; vim mortuam habet idem corpus filo ſuſpenſum.

3°. Magnâ animorum contentione aliquot abhinc annis diſputatur in Mecanica de genuinâ virium motricium menſurâ. Alii, duce Leibnitio, contendunt cognoſci vim vivam corporis cujuſcumque multiplicando molem per quadratum ipſius velocitatis, & vim mortuam determinari multiplicando molem per ſimplicem ejus velocitatem. Alii, duce Mairanno, volunt eamdem eſſe menſuram viribus vivis & mortuis, productum ſcilicet molis per velocitatem. Ut autem appareat nos non ſine cauſa huic ultimæ ſententiæ lubenter adhæſiſſe, ſit:

PROPOSITIO UNICA.

Menſura virium omnium motricium eſt productum molis per ſimplicem corporis velocitatem.

Explicatur prop. Sit corpus aliquod 5 librarum, donatum 6 gradibus velocitatis; vis hujus corporis erit præcisè 30 graduum. Ut autem firmioribus ſtabiliatur fundamentis hæc noſtra propoſitio, neceſſariò demonſtrandum eſt menſuram virium motricium, neque inferiorem, neque ſuperiorem eſſe producto molis per ſimplicem corporis velocitatem.

Dem. 1°. Non habetur quantitas virium corporis ſimpliciter addendo quantitatem molis quantitati velocitatis;

ergo menſura virium motricium non eſt inferior producto molis per corporis velocitatem. Prob. ant. Globus aliquis ligneus duarum librarum projiciatur cum 10 gradibus velocitatis; quo ſuppoſito, ſic argumentor. Globi hujus lignei libra quælibet, imò molecula quælibet decem habet gradus velocitatis; ergo ut habeatur quantitas virium hujus globi, multiplicari debent 10 gradus velocitatis per 2 libras ligni, & conſequenter non habetur quantitas virium corporis ſimpliciter addendo quantitatem molis quantitati velocitatis.

2°. Menſura virium motricium non eſt ſuperior producto molis per corporis velocitatem; non habetur, *v. g.*, menſura virium motricium vivarum multiplicando molem per quadratum velocitatis corporis; quod ut demonſtretur, ſupponamus 3 gradus velocitatis in globo eburneo A cujus moles eſt 1 libræ, & 1 gradum velocitatis in globo eburneo B cujus moles eſt 3 librarum; impingantur alter in alterum hi duo globi perfectè elaſtici; poſt conflictum in ſeipſum reſiliet globus A cum 3 gradibus velocitatis; item in ſeipſum reſiliet corpus B cum 1 gradu velocitatis; quâ experientiâ ſuppoſitâ, ſic argumentor.

Legitimè infertur ex experientia prædicta globo A & globo B vim eſſe præcisè æqualem; vis autem non eſſet æqualis globo A & globo B, ſi menſura virium vivarum foret productum molis per quadratum velocitatis; ergo menſura virium vivarum non eſt productum molis per quadratum velocitatis. Prob. min. Si menſura virium vivarum eſſet productum molis per quadratum velocitatis, vis globi A exhiberetur per numerum 9, quoniam moles ejus eſt 1 libræ & velocitas 3 graduum; & vis globi B cujus moles eſt 3 librarum & velocitas 1 gradûs, repræſentaretur per numerum 3; ergo vis non eſſet æqualis globo A & globo B, ſi menſura virium vivarum eſſet productum molis per quadratum velocitatis.

Solvuntur argumenta oppoſita.

Obj. 1°. Vis mortua eſt vis motrix, ſed menſura vis mortuæ non eſt productum molis per velocitatem; ergo menſura virium omnium motricium non eſt productum molis per velocitatem. Prob. min. Vis mortua velocitatem omnem excludit; ergo menſura vis mortuæ, &c.

Reſp. ad 1. conc. maj. & neg. min. ad 2. diſt. ant. Vis mortua excludit velocitatem omnem actualem, conc. ant. velocitatem omnem diſpoſitivam, neg. ant. & c quam. Corpus grave filo ſuſpenſum tendit ad motum; ergo velocitatem habet diſpoſitivam.

Inſt. 1°. Velocitas diſpoſitiva nihil eſt; ergo vis mortua excludit omnem omnino velocitatem. Prob. ant. Velocitas diſpoſitiva nullum habet effectum; ergo velocitas diſpoſitiva nihil eſt. Prob. ant. Velocitas diſpoſitiva non transfert corpus ex uno in alium locum; ergo nullum habet effectum.

Reſp. ad 1. neg. ant. Velocitas diſpoſitiva eſt vera reactio per quam corpus conatur diverſis ſpatiis intrà certum tempus correſpondere.

Ad. 2. neg. ant. Cauſa eſt velocitas diſpoſitiva cur tendatur filum quo corpus grave ſuſpenditur. Item in caſu æquilibrii duorum corporum cauſa eſt velocitas diſpoſitiva cur corpus unum in aliud reagat; ergo velocitas diſpoſitiva verum habet effectum.

Ad 3. diſt. ant. Velocitas diſpoſitiva non transfert, ſed transferre conatur corpus ex uno in alium locum, conc. ant.; neque transfert, neque transferre conatur corpus ex uno in alium locum, neg. ant. & c quam. Sola velocitas actualis transfert corpus ex uno in alium locum; ſola enim velocitas actualis definitur correſpondentia quam habet corpus mobile intrà certum tempus ſpatiis diverſis.

Inſt. 2°. Nulla velocitas poteſt eſſe cum quiete compoſſibilis; atqui velocitas diſpoſitiva compoſſibilis eſt cum quiete; ergo velocitas diſpoſitiva non eſt vera velocitas.

Reſp. diſt. maj. Nulla velocitas actualis poteſt eſſe cum

quiete compoſſibilis, conc. maj. Nulla omninò velocitas, neg. maj. & conc. min. neg. cquam. Imò quidem quietem neceſſariò ſupponit velocitas diſpoſitiva.

Obj. 2°. Menſura virium vivarum eſt productum molis per quadratum velocitatis; ergo non eſt productum molis per ſimplicem velocitatem. Prob. ant. experientiâ ſequenti. Sint corpus A & corpus B figuræ ſimilis, & molis omninò æqualis, unius, *v. g.*, libræ. Deſcendat corpus A per unum minutum ſecundum, & corpus B per duo minuta ſecunda temporis. Corpus A cujus velocitas eſt unius præcisè gradûs, percurret 15 pedes; & corpus B cujus velocitas eſt duorum graduum, pedes 60 percurret. Quo ſuppoſito, ſic argumentor.

Vis corporis B quater major eſt, quàm vis corporis A; nam corpus B ſpatium quater majus percurrit, quàm corpus A; ergo quantitas virium vivarum non habetur in illis, niſi multiplicando molem illorum reſpectivam per quadratum velocitatis illorum reſpectivæ, & conſequenter menſura virium vivarum eſt productum molis per quadratum velocitatis.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. admitto experientiam & diſt. ant. Corpus B ſpatium quater majus percurrit, quàm corpus A, diverſis temporibus, conc. ant.; eodem præcisè tempore, neg. ant. & cquam. In hoc autem peccat argumentum Leibnitianum, quòd in hypotheſi in qua agitur de varia velocitate inæqualia ſpatia temporibus inæqualibus percurrente, Leibnitius à tempore præcindat. Jam verò rigorosè demonſtro quòd in hypotheſi facta vis corporis B ſit tantùm duplò major quàm vis corporis A.

Dividantur 60 pedes quos percurrit corpus B per tempus in illis percurrendis adhibitum, nempe per 2 minuta ſecunda; quotiens repræſentabitur per numerum 30, nam $\frac{60}{2} = 30$. Item dividantur 15 pedes quos percurrit corpus A per tempus in illis percurrendis adhibitum, nempe per 1 minutum ſecundum; quotiens repræſentabitur per numerum 15, nam $\frac{15}{1} = 15$. Quo ſuppoſito, ſic argumentor.

Tales ſunt vires corporum B & A, quales ſunt quo-

tientes ſuperiùs memorati; nam moles æquales habent hæc duo corpora. Sed ex illis quotientibus unus eſt duplus alterius; ergo ex viribus corporum B & A una eſt alterius dupla.

Inſt. 1°. Sint hæc eadem corpora de quibus ſuperiùs. Demittatur corpus A in terram aliquam molliorem ex altitudine 15 pedum, & demittatur corpus B in eamdem terram ex altitudine 60 pedum; impreſſio quam relinquet corpus B, cujus velocitas eſt 2 graduum, quater erit profundior, quàm impreſſio, quæ fiet à corpore A, cujus velocitas eſt unius tantùm gradûs. Quo ſuppoſito ſic argumentor.

Vis corporis B quater eſt major, quàm vis corporis A; ergo menſura virium vivarum eſt productum molis per quadratum velocitatis. Prob. ant. Vires omnes ſunt effectui proportionales; ſed effectus productus per vim corporis B quater eſt major, quàm effectus productus per vim corporis A; ergo vis corporis B quater eſt major, quàm vis corporis A. Prob. min. Impreſſio quam in terra molliori corpus B relinquit, quater eſt profundior, quàm impreſſio quæ relinquitur à corpore A; ergo effectus productus, &c.

Reſp. ad 1. admitto experientiam, & neg. ant. ad 2. conc. maj. & neg. min. ad 3. diſt. ant. Impreſſio quam in terra molliori corpus B relinquit, quater eſt profundior, quàm impreſſio quæ relinquitur à corpore A, & hæc gemina impreſſio excavatur diverſis temporibus, conc. ant.; excavatur eodem præcisè tempore, neg. ant. & ſ. quam. In hoc iterum peccant Leibnitiani, quòd præcindant à tempore. Tempus quod adhibetur à corpore B impreſſionem in terra molliori relinquente, duplum eſt præcisè temporis quod adhibetur à corpore A; ergo vis corporis B duplò tantùm major eſt, quàm vis corporis A.

Inſt. 2°. Vincat corpus B 4 obſtacula æqualia; vincat autem corpus A unum dumtaxat ex his 4 obſtaculis; affirmabitur procul omni dubio vim corporis B quadruplam eſſe vis corporis A; ergo à pari ſi impreſſio quam relinquit corpus B quater eſt profundior, quàm impreſſio quæ re-

linquitur à corpore A, vis corporis B quater eſt major, quàm vis corporis A.

Reſp. diſt. ant. In hypotheſi factâ vis corporis B quater erit major, quàm vis corporis A, ſupponendo quòd corpus B hæc 4 obſtacula vincat eodem præcisè tempore, quo corpus A vincit unum ex his 4 obſtaculis, conc. ant.; ſecùs, neg. ant. & c quam. Hæc per ſe patent.

Obj. 3°. Vires vivæ non habent eamdem menſuram, ac vires mortuæ; ergo ſi menſura virium mortuarum eſt productum molis per velocitatem, menſura virium vivarum erit productum molis per quadratum velocitatis. Prob. ant. Vires ſpecificè diverſæ non habent eamdem menſuram; ſed vires vivæ & mortuæ ſunt vires ſpecificè diverſæ; ergo vires vivæ & mortuæ non habent eamdem menſuram.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. neg. maj. Pannus aureus & pannus argenteus ſunt ſpecificè diverſi, neque tamen diverſam menſuram habent; ergo à pari etiamſi (quod falſum eſt) vires vivæ & vires mortuæ in ſpecie differrent, inde inferendum non eſſet eas habere diverſam menſuram.

Inſt. Vires vivæ & vires mortuæ effectus habent ſpecificè diverſos; ergo in ſpecie differunt.

Reſp. conc. ant. & neg. c quam. Homo vigilans & homo ſomnians effectus habent ſpecificè diverſos; quis tamen audeat aſſerere hominem vigilantem ſpecificè differre ab homine ſomniante? vis omninò eadem poteſt eſſe, & revera eſt, nunc mortua, nunc viva. Talis eſt gravitas corporis A nunc filo ſuſpenſi, nunc in terram liberè cadentis; mortua eſt in primo caſu vis gravitatis corporis A, & hæc eadem vis eſt viva in caſu ſecundo; ergo vis eadem poteſt eſſe nunc mortua, nunc viva; ergo eadem debet eſſe menſura viribus mortuis & vivis, productum, nempe molis per ſimplicem velocitatem.

Corollarium 1. Falſa eſt hæc æquatio F = M V V. Et verò littera F repræſentat vim quamcumque vivam, & littera M molem quamcumque: litteræ autem V V exprimunt quadratum cujuſcumque velocitatis; ergo ſignificat æquatio ſuperior vim quamcumque vivam corporis cujuſ-

cumque æqualem esse producto ex mole & quadrato velocitatis; ergo falsa est æquatio superior.

Corollarium 2. Vera est hæc æquatio F = M V. Et verò littera F exprimit vim quamcumque vivam aut mortuam, & littera M molem quamcumque. Littera autem V designat velocitatem quamcumque, actualem aut dispositivam; ergo significat æquatio superior vim quamcumque vivam aut mortuam corporis cujuscumque æqualem esse producto ex mole & velocitate; ergo vera est æquatio superior.

CAPUT II.

De Regulis Motûs in genere spectati.

TRes sunt leges generales motûs quas nullus non Physicus admittit.

Prima lex Motûs.

Corpus omne perseverat in statu suo quietis vel motûs uniformiter per lineam rectam, nisi quatenùs à viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Explicatur hæc lex. Si corpus A, *v. g.*, quiescat, in æternum quiesceret, nisi per vim aliquam externam cogatur ab statu quietis transire ad statum motûs. Item, si corpus A semel moveatur, in æternum movebitur, donec per vim aliquam externam, seu propter impedimentum aliquod exterius, totum suum motum amiserit. Denique si corpus A incipiat moveri cum duobus gradibus motûs, lineam rectam uniformiter describet, duos gradus motûs constanter retinendo, nisi vis aliqua externa motum ejus primitivum minuat vel augeat, vel directionem ejus immutet.

Demonstratur. Corpus omne de se iners est & passivum, ut in capite I vidimus; ergo verum est quidquid enunciatur in prima lege motûs.

Secunda lex Motûs.

Mutatio motûs proportionalis est vi motrici impressæ, & fit secundùm lineam rectam quâ vis illa impressa est.

Explicatur hæc lex. Suppono corpus A moveri cùm 10 gradibus motûs ex uno in alium locum; ſuppono etiam motum ejus primi[illegible] vel augeri vel minui; dico quòd augmentum vel de[illegible] illud proportionalia erunt vi motrici impreſſæ, ſ[illegible] ait Newtonus, ſi vis aliqua motum quemdam ge[illegible]et in corpore A, dupla vis duplum motum, tripla vis triplum motum generabit. Item ſi vis aliqua unum gradum motûs deſtruat in corpore A, dupla vis duos gradus motûs, tripla vis tres gradus motûs deſtruet.

Additur in hac ſecunda lege mutationem motûs fieri ſecundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur; quod explicatione non indiget. Corpora enim quæ moventur, lineam rectam, quantùm in ipſis eſt, numquam non deſcribunt, ut fuſiùs exponetur ubi de motu per lineam curvam.

Demonſtratur. 1°. Quilibet effectus proportionalis eſt cauſæ ſuæ; ſed mutatio motûs eſt effectus vis motricis impreſſæ; ergo quælibet mutatio motûs proportionalis eſt vi motrici impreſſæ.

2°. Corpus omne tendit ad deſcribendam lineam rectam ex 1ª. lege; ergo mutatio motûs fit ſecundùm lineam rectam.

Tertia lex Motûs.

Reactio ſeu reſiſtentia ſemper eſt æqualis & contraria actioni, ſeu compreſſioni.

Explicatur hæc regula. Nihil aliud per hanc legem intelligimus, niſi æquales fieri in corpore agente & in corpore patiente ſtatûs mutationes. Cùm enim nulla poſſit eſſe actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horumce corporum colliſio, mutatio ſtatûs æqualiter in utroque corpore recipi debet. Res hæc tota apud Newtonum multiplici dilucidatur exemplo.

Quidquid premit vel trahit alterum, ait Newtonus, tantumdem ab illo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus in lapidem; nam funis utrinque diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum versùs lapidem, & lapidem versùs

equum, tantùmque impediet progreſſum unius, quantùm promovet progreſſum alterius. *Ita Newtonus, tom. 1. Principiorum Philoſophiæ.*

Regula hæc demonſtratione non indiget, cùm agitur de æquilibrio, nempe cùm Potentia conatur trahere pondus cujus vires ſunt illi præcisè æquales, vel cùm duo pondera perfectè æqualia, bilanci appenſa, in ſe invicem agunt; tunc enim evidens eſt reactionem unius æqualem eſſe actioni alterius. Itaque caſum non æquilibrii ſpectat demonſtratio ſequens.

Demonſtratur. Reactio ſemper eſt æqualis actioni deſtructæ; ergo vera eſt lex tertia motûs. Prob. ant. Suppono equum A capacem eſſe vincendi, ſeu trahendi præcisè pondus trecentarum librarum. Suppono hunc eumdem equum actu trahere pondus 100 librarum; experientiâ conſtat quòd vires in equo A remanentes poſſint vincere pondus ducentarum dumtaxat librarum; ergo 100 gradus virium deſtructi fuerunt in equo A per pondus 100 librarum; ergo reactio ſemper æqualis eſt actioni deſtructæ.

Item reactio ſemper eſt actioni contraria, quia ſcilicet actio & reactio conſtituunt duas vires directè & diametraliter oppoſitas; ergo vera eſt lex tertia motûs.

CAPUT III.

De Legibus Motûs Centripeti.

NIhil eſt aliud motus Centripetus, quàm motus versùs centrum aliquod.

Motum centripetum ſeu vim centripetam habent corpora gravia ſublunaria; hæc enim corpora versùs centrum terræ continuò tendunt, & ità tendunt ut, ſibi derelicta, tantùm accedant ad hoc centrum, quantùm illis accedere fas eſt. Duas leges motûs centripeti detexit Newtonus quæ vocantur à recentioribus Phyſicis *leges attractionis*. Poſtulat igitur ordo methodicus, ut primùm agamus de natura, deinde de effectibus duarum illarum legum.

ARTICULUS I.

De Legibus attractionis.

ATtractio Newtoniana definiri debet tendentia mutua quam habent ad ſe invicem varia orbis hujus corpora. Sic enim Newtonus loquitur quæſtione 31 (hanc legem attractionis ità hîc accipi velim, ut in univerſum ſolummodò vim aliquam ſignificare intelligatur, quâ corpora ad ſe mutuò tendant; cuicumque demùm cauſæ attribuenda ſit illa vis).

Hinc ſequitur triplicem eſſe attractionis ſpeciem, attractionem nempe activam, attractionem paſſivam & attractionem mutuam. Attractio activa reſidet in corpore attrahente; attractio paſſiva in corpore attracto; attractio mutua partim reſidet in corpore attrahente, partim in corpore attracto. Hæc omnia dilucidabuntur exemplis ſequentibus.

Ac primò quidem conſtat experientiis innumeris corpora mole minora tendere versùs corpora mole majora. Et verò quotieſcumque ſibi relinquuntur corpora in athmoſphæra terræ poſita, toties illa videmus in Terram quaſi ſponte cadere. Eam ob rem affirmant Newtoniani à Terrâ attrahi varia corpora ſublunaria. Attractio quam Terra exercet in corpora mole minora, dicitur & eſt attractio activa Terræ; attractio autem quam patiuntur corpora ſublunaria ex parte Terræ, vocatur & eſt attractio paſſiva corporum in athmoſphæra Terræ poſitorum. Nec ſatis; Planetæ primarii, ſibi ipſis derelicti, in ſolem evidenter caderent; attractionem igitur activam ſol exercet in planetas; attractionem verò paſſivam planetæ patiuntur ex parte ſolis.

2°. Conſtat multis phænomenis, conſtat, *v. g.*, æſtu reciproco maris, conſtat etiam variationibus innumeris quæ animadvertuntur in motibus corporum cæleſtium, corpora mole majora tendere versùs corpora mole minora, ſeu corpora mole majora attrahi à corporibus mole minoribus. Non ſolùm enim Terra attrahit lunam, ſed etiam luna

attrahit terram : item non solùm sol attrahit planetas, sed & planetæ attrahunt solem. Datur igitur in corpore quolibet attractio tum activa, tum passiva ; datur etiam inter varia orbis hujus universi corpora attractio seu gravitatio mutua. Hæc directè probabuntur inferiùs.

3°. Linea directionis attractionis mutuæ est linea transiens per centra gravitatis duorum corporum sese invicem attrahentium; ac proindè directio attractionis mutuæ eadem omninò est ac directio vis centripetæ.

4°. Motus attractionis non est motus ad arbitrium fictus, sed est motus certis & demonstratis legibus subditus. Gemina autem est lex attractionis, altera molem, distantiam altera spectans. Prima lex attractionis hæc est :

Attractio fit in ratione directa molium.

Hoc est, si moles corporis A sit quater major mole corporis B, vis attractiva corporis A erit quater major quàm vis attractiva corporis B, ac proinde efformari poterit proportio sequens ; attractio activa corporis A : ad attractionem activam corporis B :: moles corporis A, nempe 4 : ad molem corporis B, nempe 1. Secunda lex attractionis hæc est :

Attractio est in ratione inversa quadratorum distantiarum à centro virium.

Hoc est, distet corpus C à centro Terræ uno radio terrestri, & corpus D distet duobus radiis terrestribus ; corpus C quater magis attrahetur à Terra, quàm corpus D ; poterit igitur efformari proportio sequens ; attractio passiva corporis C, seu attractio quam corpus C patitur ex parte Terræ : ad attractionem passivam corporis D :: numerus 4, nempe quadratum numeri exprimentis distantiam corporis D à centro Terræ : ad numerum 1, nempe ad quadratum numeri exprimentis distantiam corporis C ab eodem centro Terræ.

5°. Motus projectionis est motus uniformis & idem constanter perseverans ; motus verò attractionis est motus va-

riabilis ; ſequitur enim rationem inverſam quadratorum diſtantiarum à centro virium.

6°. Motus projectionis ſuam habet directionem per lineam horizontalem ; motus verò attractionis ſuam habet directionem per lineam ductam à centro corporis attracti ad centrum virium.

7°. Linea directionis motûs projectionis & linea directionis motûs attractionis angulum efficiunt nunc rectum, nunc acutum, nunc obtuſum. His præmiſſis, ſit.

PROPOSITIO I.

Si datur attractio Newtoniana, hæc attractio non eſt ſimilis qualitatibus occultis Peripateticorum.

Probatur. Qualitates occultæ Peripateticorum erant qualitates perſeveranter inhærentes corporibus, & ipſis intrinſecæ ; ergo ſi datur attractio Newtoniana, hæc attractio non eſt ſimilis qualitatibus occultis Peripateticorum. Prob. quam. Numquàm affirmarunt Newtoniani corpora tendere alia versùs alia per virtutem ipſis intimam ; imò quidem affirmarunt tendentiam illam mutuam effectum eſſe immediatum legis alicujus generalis quam Deus initio mundi liberè inſtituit ; ergo ſi qualitates occultæ Peripateticorum perſeveranter inhærebant corporibus & illis erant intrinſecæ, attractio Newtoniana nullam habet ſimilitudinem cum qualitatibus occultis Peripateticorum.

Confirmatur. Ipſiſmet Newtoni verbis qui ſic loquitur definitione 8ª. Principiorum mathematicorum Philoſophiæ naturalis. (Porro attractiones & impulſus eodem ſenſu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem attractionis, impulſûs, vel propenſionis cujuſcumque in centrum, indifferenter & pro ſe promiſcuè uſurpo ; has vires non phyſicè, ſed mathematicè tantùm conſiderando. Unde caveat lector ne per hujuſmodi voces cogitet me ſpeciem vel modum actionis, cauſamve aut rationem phyſicam alicubi definire, vel centris quæ ſunt puncta mathematica, vires verè & phyſicè tribuere ; ſi fortè aut centra trahere aut vires centrorum eſſe dixero.)

Sic etiam loquitur Newtonus in ſcholio prop. 69. lib. 1. Principiorum. (Vocem attractionis hîc generaliter uſurpo pro corporum conatu quocumque accedendi ad invicem : ſive conatus iſte fiat ab actione corporum vel ſe mutuò petentium, vel per ſpiritus emiſſos ſe invicem agitantium; ſive is ab actione ætheris, aut aeris, mediive cujuſcumque ſeu corporei ſeu incorporei oriatur corpora innatantia in ſe invicem utcumque impellentis. Eodem ſenſu generali uſurpo vocem *impulsûs*, non ſpecies virium & qualitates phyſicas, ſed quantitates & proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens.)

PROPOSITIO II.

Datur inter varia orbis hujus univerſi corpora attractio Newtoniana.

Probatur. Varia corpora cæleſtia, Planetæ videlicet & cometæ, gravitant versùs ſolem vi legis generalis quam vocamus legem attractionis; ergo datur attractio Newtoniana. Prob. ant. Varia corpora cæleſtia non gravitant versùs ſolem per naturam ſuam, ſunt enim inertia; neque etiam gravitant versùs ſolem per impulſum; ergo gravitant vi legis generalis quam vocamus legem attractionis. Prob. ant. quoad ſecundam partem. Si corpora cæleſtia gravitarent versùs ſolem per impulſum, ſequeretur quòd impulſum hunc acciperent à materiâ quâdam ambiente quæ ſpatia cœleſtia exactè repleret, qualis eſſet, *v. g.*, materia ætherea vorticosè agitata; falſum c̃quens, ergo & ant. Prob. min. Si materia quædam ſubtilior, exactè ſpatia cœleſtia replens, Planetis impulſum præberet, ita ut ab hac materia Planetæ accipiant motum ſuum periodicum ab occaſu in ortum, ſequeretur quòd brevi cometæ totum ſuum motum amitterent, atque in ſolem caderent; falſum experientiâ c̃quens, ergo & ant. Prob. ſeq. vera ſunt & inconcuſſa hæc tria. 1°. Motus multorum cometarum eſt ab ortu in occaſum; 2°. motus materiæ ſubtilioris planetas ambientis, & periodicè illos impellentis ab occaſu in ortum, (ſi talis exiſteret materia), dirigeretur evidenter

ab occaſu in ortum; 3°. hæc materia ſubtilior, exactè ſpatia cœleſtia replens, conſtitueret fluidum ſaltem æque denſum, ac cometa quicumque; quo ſuppoſito, ſic argumentor:

Non poſſunt eſſe vera hæc tria, quin brevi cometæ totum ſuum motum amittant, atque cadant in ſolem; ſed vera ſunt hæc tria; ergo &c. Prob. maj. Non poteſt corpus cylindricum ingredi fluidum ejuſdem denſitatis, quin mediam velocitatis ſuæ partem amittat, poſtquam axis ſui longitudinem ſemel percurrerit, etiamſi ſupponatur eſſe in quiete tale fluidum; ergo à fortiori, ſi motus multorum cometarum eſt ab ortu in occaſum, & motus materiæ ſubtilioris de qua loquimur, ab occaſu in ortum, multi cometæ fluidum illud ingredientes, ibi ſuum omnem motum brevi amitterent atque in ſolem caderent. Prob. ant. Corpus cylindricum non poteſt ingredi fluidum ejuſdem denſitatis, in eoque axis ſui longitudinem ſemel percurrere, quin ex loco dimoveat volumen materiæ æquale volumini ſuo; atqui corpus cylindricum non poteſt ex loco dimovere volumen materiæ æquale volumini ſuo, quin mediam velocitatis ſuæ partem amittat, ut demonſtrabitur in capite nono; ergo corpus cylindricum non poteſt ingredi fluidum ejuſdem denſitatis, in eoque axis ſui longitudinem ſemel percurrere, quin mediam velocitatis ſuæ partem amittat.

Quod dictum eſt de corporibus cylindricis, hoc proportionaliter dicatur de cometis, qui, cùm figuram ſphæricam habeant, paulò tardiùs in illo fluido mediam velocitatis ſuæ partem amitterent.

PROPOSITIO III.

Attractio Nevvtoniana fit in ratione directa molium.

Probatur. Quò major eſt corporum moles, eò major eſt ipſorum vis attractiva; ergo attractio fit in ratione directa molium. Prob. ant. corpora mole minora per attractionem tendunt versùs corpora mole majora; corpora ſublunaria, *v. g.*, per attractionem tendunt versùs Terram; Terra ipſa tendit versùs ſolem; ergo quò major eſt corpo-

rum moles, eò major est ipsorum vis attractiva; nam corpora sublunaria sunt mole minora quàm Terra; & moles Terræ multò minor est mole solis. Prob. ant. Ex propositione 2ª. corpora mole minora non tendunt versùs corpora mole majora per naturam suam, aut per impulsum; ergo tendunt per attractionem.

PROPOSITIO IV.

Attractio Newtoniana est in ratione inversa quadratorum distantiarum à centro virium.

Antequam probetur hæc propositio, hæc sunt diligenter annotanda.

1°. Luna distat à centro Terræ 60 radiis terrestribus, seu 90000 leucis aut circiter, ac proinde corpus grave A positum in regione lunæ distaret à centro Terræ 60 radiis terrestribus.

2°. Quadratum numeri 60 est 3600.

3°. Corpora gravia quæ super Terræ superficiem cadere solent, distant à centro Terræ uno radio terrestri, seu 1500 leucis aut circiter.

4°. Quadratum numeri 1 est 1.

5°. Demonstrabimus in capite 7 quòd si luna sibi, vel potiùs attractioni suæ passivæ relinqueretur, ipsa percurreret 15 pedes intrà primum minutum temporis. Quod de luna demonstratur, hoc ipsum dici potest de corpore quocumque gravi A posito in regione lunæ, & derelicto attractioni suæ passivæ.

6°. In fine capitis hujus demonstrabitur quòd corpora gravia quæ super Terræ superficiem cadere solent, percurrere debeant intrà primum minutum temporis 54000 pedes.

7°. Numerus 54000 est ter milliès sexcentiès major numero 15; nam $15 \times 3600 = 54000$. Quibus annotatis,

Probatur propõ. Corpus quodcumque grave A distans à centro Terræ 60 radiis terrestribus, cadendo percurreret intrà primum minutum temporis 15 pedes; & idem corpus A distans à centro Terræ uno tantùm radio terrestri

percurreret intrà primum minutum temporis 54000 pedes; ergo ſpatium quod cadendo percurreret intrà unum minutum temporis corpus A diſtans à centro Terræ uno tantùm radio terreſtri foret ter milliès ſexcentiès majus, quàm ſpatium quod intrà unum minutum temporis cadendo percurreret idem corpus A diſtans à centro Terræ 60 radiis terreſtribus; ergo corpus A diſtans à centro Terræ uno tantùm radio terreſtri ter milliès ſexcentiès magis attrahitur à Terra, quàm cùm diſtat à centro Terræ 60 radiis terreſtribus; ergo inſtitui poteſt proportio ſequens; attractio quam patitur ex parte Terræ corpus A ex centro diſtans uno radio terreſtri : ad attractionem quam patitur, cùm diſtat 60 radiis terreſtribus :: 3600 : 1, ſeu :: quadratum numeri 60 : ad quadratum numeri 1. Sed hoc ipſum eſt ſequi rationem inverſam quadratorum diſtantiarum à centro virium, ut conſideranti patebit; ergo attractio Nevvtoniana ſequitur rationem inverſam quadratorum diſtantiarum à centro virium.

PROPOSITIO V.

Syſtema attractionem Nevvtonianam admittens eſt ſyſtema mecanicum.

Probatur. Syſtema legibus certis innixum non poteſt non eſſe mecanicum; atqui ſyſtema attractionem Nevvtonianam admittens, eſt ſyſtema legibus certis innixum, ut patet ex propoſitionibus 3 & 4; ergo ſyſtema attractionem Nevvtonianam admittens eſt ſyſtema mecanicum.

Solvuntur argumenta oppoſita.

Obj. 1°. Attractio Nevvtoniana non differt à qualitatibus occultis Peripateticorum; ergo falſa eſt propõ 1ª. Prob. ant. Quod olim reſpondebant Peripatetici, hoc ipſum noſtris hiſce diebus reſpondent Nevvtoniani; ergo attractio Nevvtoniana non differt à qualitatibus occultis Peripateticorum. Prob. ant. Reſpondebant olim Peripatetici corpora ſublunaria ſibi derelicta in Terram cadere, quia ſcilicet gravia

gravia ſunt, ſeu in Terram gravitant; reſpondent nunc Newtoniani corpora ſublunaria ſibi derelicta in Terram cadere, quia ſcilicet attrahuntur à Terra. Quo ſuppoſito, ſic argumentor: in Terram gravitare, & à Terra attrahi, idem omnino ſonant, nam ab attractione non differt gravitatio; ergo quod olim reſpondebant Peripatetici, hoc ipſum noſtris hiſce diebus reſpondent Newtoniani.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. neg. ant. ad 3. admitto reſponſionem, & diſt. ant. Ab attractione non differt gravitatio orta à lege quadam generali, conc. ant. orta à qualitate quadam eſſentiali corpori gravi, nego ant. & c̃quam. corporibus eſt extrinſeca attractio Newtoniana; eſt enim effectus immediatus legis alicujus generalis quâ Deus voluit ut corpora tenderent alia versùs alia. Contrà verò gravitatio peripatetica erat qualitas eſſentialis & intrinſeca corporibus, & conſequenter ab illis inſeparabilis.

Inſt. 1°. Nullam Deus legem attractionis condidit; ergo attractio Newtoniana non eſt effectus legis alicujus generalis. Prob. ant. Ut Deus condat legem aliquam generalem, dari debet occaſio & motivum legem hanc condendi; atqui non datur occaſio & motivum condendi legem attractionis; ergo Deus legem hanc non condidit. Prob. min. Nihil eſt in corporibus quod exigat ut Deus condat legem hujuſmodi; ergo &c.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. conc. maj. & neg. min. ad 3. diſt. ant. Nihil eſt in corporibus quod exigat abſolutè ut Deus condat legem attractionis conc. ant.; nihil eſt in corporibus quod exigat hypotheticè ut Deus condat legem attractionis, neg. ant. & c̃quam. Deus voluit ut Planetæ & cometæ circumferentias ellipticas circa ſolem deſcriberent, & conſequenter ad hanc voluntatem legem attractionis Deus condidit. Hæc dilucidabuntur in capite octavo.

Inſt. 2°. Newtonus ipſe non diſtinguit attractionem ab impulſu, ut annotavimus ſuperiùs; ſed impulſus non eſt effectus immediatus legis alicujus generalis; ergo neque attractio.

Reſp. diſt. maj. Newtonus ipſe non diſtinguit attractio-

ſem ab impulſu, hoc eſt, Nevvtonus aſſeruit attractionem non eſſe qualitatem magis inhærentem corporibus, quàm impulſum, conc. maj.; ſecùs, neg. maj. conc. min. & neg. c̃quam. Nevvtonus affirmavit vacuum exiſtere in ſpatiis cœleſtibus; ergo ipſi perſuaſum erat attractionem exiſtere, vi legis alicujus generalis cujus eſt effectus immediatus.

Obj. 2°. Non datur attractio inter varia orbis hujus corpora; ergo falſa eſt propoſitio ſecunda. Prob. ant. Diſponantur ſuper eamdem lineam rectam S A *fig. 8 tab. V*, tria corpora perfectè æqualiã B, C, D, ita ut quantùm diſtat corpus B ex corpore C, tantùm diſtet corpus D ex eodem corpore C; quo ſuppoſito, quæro utrùm vis quâ corpus B & corpus D ſeſe attrahunt, retardetur an verò augeatur per corpus C interpoſitum; quidquid reſpondebitur, erit argumentum.

Reſp. 1°. Hæc tria corpora ita attrahi à Terra, ut attractiones illorum particulares ſint prorſus inſenſibiles.

Reſp. 2°. Si Terra nullam in hæc tria corpora attractionem exerceret, vis quâ corpus B & corpus D ſeſe attraherent, neque retardaretur, neque augeretur per interpoſitionem corporis C.

Inſt. In hac ultima hypotheſi corpus B, interpoſito corpore C, velociùs moveretur; ergo falſum eſt quòd corpus B & corpus D ſeſe attrahere debeant eodem modò, ſive interponatur, ſive non interponatur corpus C.

Reſp. diſt. ant. In hac ultima hypotheſi corpus B, interpoſito corpore C, velociùs moveretur, propter ſolam attractionem corporis D in corpus B, neg. ant. propter attractionem corporum C & D in corpus B, conc. ant. & neg. c̃quam. Supponamus in hoc orbe exiſtere tria tantùm corpora B, C, D. Corpus intermedium C è loco ſuo non movebitur; tàm enim attrahetur per corpus B, quàm per corpus D. Sed corpus B velociùs movebitur, interpoſito, quàm non interpoſito corpore C, quia ſcilicet in hac hypotheſi corpus B attrahetur à corporibus C & D.

Quod dictum fuit de corpore B reſpectu corporum C

& D, hoc & dicatur de corpore D reſpectu corporum C & B.

Obj. 3°. Attractio Newtoniana non fit in ratione directa molium, ergo falſa eſt propoſitio tertia. Prob. ant. Exhauriatur aer ex excipulo machinæ pneumaticæ, & gravitati ſuæ relinquantur in hoc expurgato excipulo varia corpora diverſæ denſitatis; videbuntur corpora leviſſima æque celeriter cadere, ac corpora graviſſima. Quo ſuppoſito, ſic argumentor.

Si attractio Newtoniana fieret in ratione directa molium, ſequeretur quòd corpus graviſſimum, qualis eſt pes cubicus auri, deberet celeriùs cadere in excipulo aere expurgato, quàm corpus leviſſimum, qualis eſt pes cubicus ſuberis; falſum experientiâ conſequens, ergo & ant. Prob. ſeq. Luna gravitati ſuæ derelicta celeriùs in Terram caderet, quàm corpus unius libræ diſtans à centro Terræ 60. radiis terreſtribus, & gravitati ſuæ derelictum; ergo à pari in excipulo aere expurgato pes cubicus auri deberet celeriùs cadere, quàm pes cubicus ſuberis. Prob. ant. Luna majorem habet vim centripetam, quàm corpus unius libræ; ergo luna deberet celeriùs cadere, quam corpus unius libræ.

Antequam ſolvatur hæc graviſſima difficultas, non pauca ſunt priùs annotanda.

1°. Vis acceleratrix nihil eſt aliud, quàm velocitas recepta in corpore cadente, quæcumque ſit cauſa velocitatem hanc communicans.

2°. Vis acceleratrix recepta in corpore decidente eſt in ratione compoſitâ directâ molis corporis attrahentis, & inversâ quadrati diſtantiæ à centro corporis attrahentis. Repræſentetur, *v. g.*, moles Terræ, per numerum 1000; moles Lunæ, per numerum 50; moles corporis unius libræ, per numerum 1; diſtantia quæ eſt inter centrum Terræ & corpus attractum, per litteram D; & quadratum hujus diſtantiæ, per DD. Vis acceleratrix recepta in luna cadente æqualis erit moli Terræ diviſæ per quadratum diſtantiæ lunæ à centro Terræ, ac proinde vis acce-

leratrix recepta in luna cadente exprimetur per fractionem $\frac{1000}{DD}$.

3°. Eamdem propter cauſam vis acceleratrix recepta in corpore unius libræ cadente repræſentabitur per fractionem $\frac{1000}{DD}$.

4°. Vis centripeta corporis alicujus cadentis cognoſcitur multiplicando molem corporis cadentis per vim ipſius acceleratricem, ac proindè vis centripeta lunæ cadentis exprimetur per fractionem $\frac{50 \times 1000}{DD} = \frac{50000}{DD}$.

5°. Eamdem propter cauſam vis centripeta corporis unius libræ in Terram cadentis exprimetur per fractionem $\frac{1 \times 1000}{DD} = \frac{1000}{DD}$, ac proinde inſtitui poteſt proportio ſequens; vis centripeta lunæ cadentis: ad vim centripetam corporis unius libræ ex eadem diſtantia cadentis:: $\frac{50000}{DD}$: $\frac{1000}{DD}$:: 50000 : 1000; nam ex hypotheſi $DD = DD$. Verum eſt igitur quòd luna cadens majorem haberet vim centripetam, quàm corpus unius libræ ex eadem diſtantia in Terram decidens.

6°. Spatium quod percurrit corpus in motu, pendet à gradu velocitatis ipſius. Non valet enim hæc conſequentia; *corpus* A *majorem habet motum, quàm corpus* B, *ergo corpus* A *percurrit ſpatium majus, quàm corpus* B; non valet, inquam, conſequentia ſuperior, niſi ſimul addatur exceſſum motûs in corpore A oriri ab exceſſu velocitatis.

7°. Spatium quod corpus cadendo percurrit, pendet à gradu vis acceleratricis in illo receptæ. Peſſimè enim ratiocinaretur quicumque ſic loqueretur: *corpus* C *majorem habet vim centripetam, quàm corpus* D; *ergo corpus* C *celeriùs cadit, quàm corpus* D; non valet hæc conſequentia, niſi cùm additur exceſſum vis centripetæ in corpore C oriri ab exceſſu vis acceleratricis. Quoniam igitur fuit ſuperiùs annotatum lunam & corpus unius libræ æqualem

habere vim acceleratricem, cùm ſupponuntur ex eadem diſtantia cadere; evidens eſt quòd hæc duo corpora cum eadem velocitate versùs Terram decíderent, etiamſi luna majorem haberet vim centripetam, quàm corpus unius libræ. His annotatis.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. admitto experientiam & neg. ſeq. ad 3. neg. ant. ad 4. diſt. ant. Luna majorem habet vim centripetam, quàm corpus unius libræ; & hic exceſſus vis centripetæ in luna oritur ab exceſſu molis, conc. ant. oritur ab exceſſu vis acceleratricis, neg. ant. & c̃quam. Hæc patent ex ſuperiùs annotatis.

Inſt. 1°. In ſpatio pleno aut quaſi pleno pes cubicus auri celeriùs cadit, quàm pes cubicus ſuberis, etiamſi hæc duo corpora in Terram ex eadem diſtantia cadant; ergo à pari in vacuo pes cubicus auri celeriùs cadere debet, quàm pes cubicus ſuberis, etiamſi hæc duo corpora ex eadem diſtantia cadant.

Reſp. conc. ant. & neg. c̃quam & paritatem. In ſpatio pleno aut quaſi pleno reperitur fluidum dividendum; in ſpatio vacuo nullum aut quaſi nullum eſt fluidum. Faciliùs autem dividitur fluidum à corpore cujus vis eſt major, quàm à corpore cujus vis eſt minima. Porrò multò major eſt vis in pede cubico auri, quàm in pede cubico ſuberis; virium enim menſura eſt productum molis per velocitatem.

Inſt. 2°. Atqui in hypotheſi facta luna & corpus unius libræ non recipiunt à Terra æqualem vim acceleratricem, ergo nulla ſolutio. Prob. ſubſ. Corpus unius libræ debet æquali tempore plus ſpatii conficere, quàm luna; ergo luna & corpus unius libræ non recipiunt à Terra æqualem vim acceleratricem. Prob. ant. Fatentur ipſimet Newtoniani quòd cùm duo corpora ſeſe attrahunt, ſpatia percurſa ſunt in ratione inverſa molium; ergo corpus unius libræ debet æquali tempore plus ſpatii conficere, quàm luna; moles enim unius libræ multò minor eſt molè lunæ.

Reſp. ad 1. neg. ſubſ. ad 2. neg. ant. ad 3. conc. ant. & neg. c̃quam tanquam de non ſupponente. In hypotheſi facta corpus unius libræ & luna non ſupponuntur ſeſe attrahere,

ſed attractioni activæ Terræ ſupponuntur obedire. Nulla eſt igitur connexio inter ultimum antecedens & ultimam conſequentiam. Agitur in antecedente de duobus corporibus quæ ſeſe mutuò attrahunt; & agitur in conſequentia de duobus corporibus quæ obediunt attractioni activæ Terræ.

At inquies, quid ſibi vult hæc regula, *cùm duo corpora ſeſe attrahunt, ſpatia percurſa ſunt in ratione inverſa molium.*

Reſp. Si attractioni ſuæ mutuæ obedirent Terra & luna, inſtitui poſſet proportio ſequens; ſpatium quod percurrit Terra ad attingendam lunam: ad ſpatium quod percurrit Luna ad attingendam Terram :: moles lunæ : ad molem Terræ.

Dices iterum. Si tria corpora de quibus modò loquebamur, nempe Terra, Luna & corpus unius libræ relinquerentur attractioni ſuæ mutuæ; quidnam accideret?

Reſp. Terra & Luna in hac hypotheſi ſeſe citiùs attingerent, quàm Terra & corpus unius libræ. Plus enim ſpatii Terra conficeret ad attingendam Lunam, quàm ad attingendum corpus unius libræ.

Obj. 4°. Attractio Nevvtoniana non eſt in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum à centro virium, ergo falſa eſt propoſitio quarta. Prob. ant. Si legem hanc ſervaret attractio Nevvtoniana, ſequeretur quòd duo corpora particularia A & B ſeſe invicem attrahentia, non ſepararentur niſi difficilè admodum, ſi ſemel ſeſe tetigiſſent; falſum experientiâ cquens, ergo & ant. Prob. ſeq. Quò propiùs accedunt duo corpora A & B, eò magis creſcit vis illorum attractiva; ergo &c.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. neg. ſeq. ad 3. diſt. ant. Quò propiùs accedunt duo corpora A & B, eò magis creſcit vis illorum attractiva, ſi Terra nullam vim attractivam exerceret in illa corpora, conc. ant. Si Terra vim ſuam attractivam exerceat in illa corpora, neg. ant. & cquam. Ita attrahuntur à Terra corpora, aut ſuper Terræ ſuperficiem, aut in athmoſphæra terreſtri collocata, ut prorsùs inſenſibiles ſint attractiones illorum particulares.

Nec ſatis. Etiamſi præcindatur ab attractione Terræ, facilè admodum ſepararentur ab invicem duo corpora particularia A & B ſeſe tangentia; illis enim eſt moles exigua, & vis illorum attractiva eſt in ratione directa molium.

Inſt. 1°. Ex dictis ſaltem ſequitur quòd varia corpora in ſuperficie Terræ poſita, à Terra ſeparari non poterunt niſi difficilè admodum; falſum experientiâ conſequens, ergo & ant. Prob. ſeq. Terra exercet attractionem maximam in illa corpora quæ ſuperficiem ejus tangunt; ergo ex dictis ſequitur, &c. Prob. ant. Terra exercet attractionem magnam in corpora ſublunaria quæ multùm ab ejus ſuperficie diſtant; ergo maximam attractionem exercere debet in illa corpora quæ ſuperficiem ejus tangunt; nam attractio ſequitur rationem inverſam quadratorum diſtantiarum à centro.

Reſp. ad 1. neg. ſeq. ad 2. diſt. ant. Terra exercet attractionem maximam in illa corpora quæ ſuperficiem ejus tangunt, ità ut effectus hujus attractionis in eo tantùm conſiſtat ut corpus attractum accipiat certum gradum velocitatis acceleratricis, conc. ant. ita ut effectus hujus attractionis in eo conſiſtat, ut corpus attractum invincibiliter adhæreat huic parti terræ quam tangit, neg. ant. & c̃quam. Corpus ſuperficiem Terræ tangens gradum velocitatis accipit, vi cujus 15 pedes primo minuto ſecundo temporis percurrere poteſt. Hinc ad 3. conc. ant. & diſt. c̃quens ut ſuprà.

Inſt. 2°. Si attractio Nevvtoniana foret in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum à centro virium, ſequeretur quòd luna girare deberet circa ſolem, non verò circa Terram; falſum c̃quens, ergo & ant. Prob. ſeq. Luna magis attrahitur à ſole, quàm à Terra; fatentur enim ipſimet Nevvtoniani attractionem quam patitur luna ex parte ſolis: ad attractionem quam patitur ex parte Terræ :: 4 : 3, aut circiter; ergo luna girare deberet circa ſolem, non verò circa Terram.

Reſp. ad 1. neg. ſeq. ad 2. conc. ant, & neg. c̃quam. Ex eo quòd luna attrahatur à ſole & à Terra, inde ſequitur lunam neceſſariò girare circa ſolem ſimul & circa

Terram, ut reverà girat in ſyſtemate Terræ mobilis. Ex hac objectione tantummodò ſequitur ſyſtema Terræ immobilis incompoſſibile eſſe cum attractionis ſyſtemate; quod fatemur ultrò.

Obj. 5°. Syſtema attractionis neque eſt phyſicum, neque Mecanicum; ergo falſa eſt propõo 5ª. Prob. ant. In ſyſtemate attractionis non afferuntur cauſæ phyſicæ variorum naturæ phœnomenorum; nam in illo ſyſtemate paſſim affirmatur varia phœnomena evenire propter liberam Dei voluntatem, ergo &c. Prob. ant. Explicatione ſequenti. Si quæratur à Nevvtoniano quodam quanam de cauſa corpus ſublunare ſibi derelictum in Terram cadat; reſpondebit ille Nevvtonianus corpus illud ſublunare à Terra magis attrahi, quàm ab illo Terra attrahitur. Item ab illo ſi quæſieris quanam de cauſa corpus ſublunare à Terra plus attrahitur, quàm ab illo attrahitur Terra; reſpondebit ſtatim attractionem activam ſequi directam rationem molium. Denique ſi quæratur ab illo quanam de cauſa rationem directam molium attractio activa ſequatur; reſpondebit idem Nevvtonianus Deum ſic liberè ſtatuiſſe. Quo ſuppoſito, ſic argumentor: ſic reſpondere, affirmare eſt varia phœnomena evenire propter liberam Dei voluntatem; atqui ſic reſpondetur in ſyſtemate attractionis; ergo affirmatur in illo ſyſtemate varia phœnomena evenire propter liberam Dei voluntatem.

Reſp. ad 1 *&* 2 *neg. ant. ad* 3. *diſt. maj.* Sic reſpondere, affirmare eſt varia phœnomena evenire immediatè propter liberam Dei voluntatem, neg. maj. mediatè tantùm, conc. maj. min. & diſt. cquens ut ſuprà. In ſyſtemate Nevvtoniano cauſa immediata deſcensûs corporum eſt attractio certis legibus ſubdita, & cauſa immediata legum attractionis eſt libera Dei voluntas.

Ex dictis hæc neceſſariò ſequuntur. 1°. Ad Deum in Phyſica recurrendum eſt immediatè, cùm agitur de lege quadam generali. Item Deo immediatè tribui debent effectus, cùm cauſa prima, ſeu univerſalis, agit excluſivè ad cauſas omnes ſecundas. Id accidit in omnibus omninò Phyſicæ ſyſtematibus. Ex Carteſiano quocumque *v. g.*, ſi

quæſieris quanam de cauſa corpus durum non elaſticum A cum 4 gradibus velocitatis impactum in corpus durum non elaſticum B quieſcens & æquale, ſi quæſieris, inquam, quanam de cauſa corpus B poſt conflictum moveatur cum 2 gradibus velocitatis; is profectò reſpondebit communicari velocitatem in ratione directa molis percuſſæ. Iterum ab eodem Carteſiano ſi quæſieris quanam de cauſa fiat communicatio velocitatis in ratione directa molis percuſſæ; ab illo procul omni dubio reſpondebitur Deum ſic liberè, initio mundi ſtatuiſſe; quam reſponſionem nemo non probabit; ergo phyſicum & mecanicum poteſt eſſe ſyſtema in quo identidem ad Deum immediatè recurritur: recurſum illum improbat ſola epicuriana Phyſica.

Inſt. Admittitur in ſyſtemate Newtoniano circulus quidàm vitioſus; ſic enim ratiocinantur Newtoniani: Datur attractio inter varia orbis hujus univerſi corpora, quia ſcilicet Planetæ lineas curvas circà ſolem deſcribunt. Ideò autem Planetæ deſcribunt lineas curvas circà ſolem, quia Planetæ donantur variis motibus quorum unus eſt motus attractionis. Quo ſuppoſito, ſic argumentor: Nevvtoniani probant attractionem per motum planetarum, & probant motum planetarum per attractionem; ergo, &c.

Reſp. ad ultimum argumentum. Nego quòd Nevvtoniani probent per attractionem Planetas circa ſolem lineas curvas deſcribere; id probant Nevvtoniani per obſervationes aſtronomicas; & deinde linearum curvarum formationem phyſicam explicant duorum motuum ope, quorum alter projectionis, alter attractionis eſt.

Pariter cùm agitur de deſcenſu corporum, Nevvtoniani probant attractionem univerſaliter ſumptam per deſcenſum corporum, & deinde modum hujus deſcenſûs explicant per leges particulares attractionis; nullus igitur in ſyſtemate Nevvtoniano circulus vitioſus admittitur.

At inquies. Si datur attractio Nevvtoniana inter varia orbis hujus univerſi corpora, quânam de causâ videmus duos magnetes ſeſe fugere, cùm polus borealis unius reſpicit polum borealem alterius.

Reſp. Duo illi magnetes tùm ſeſe fugiunt, non præciſè prout corpora, ſed prout talia corpora, tali modo diſpoſita, & tali athmoſphærâ circumdata; quemadmodum exponunt Phyſici, ubi de magnete diſputant.

COROLLARIUM I.

Duo corpora æqualia in ſuperficie duarum ſphærarum æqualis denſitatis & diverſæ magnitudinis conſtituta, attrahuntur in ratione directa radiorum ſphærarum earumdem.

Explic. Sint duæ ſphæræ A & B, ejuſdem denſitatis, quarum prima ſit milliès major alterâ. Conſtituatur corpus C in ſuperficie ſphæræ A, & corpus D, in ſuperficie ſphæræ B. Dico quòd attractio quam patitur corpus C: ad attractionem quam patitur corpus D :: radius ſphæræ A: ad radium ſphæræ B, ſeu :: 10 : 1; cùm enim demonſtretur à Geometris quantitates materiæ duarum ſphærarum ejuſdem denſitatis eſſe in ratione directa cuborum radiorum ſphærarum earumdem, non poteſt eſſe ſphæra A milliès major ſphærâ B, quin radius ſphæræ A ſit deciès major radio ſphæræ B; nam cubus numeri 10 = 1000, & cubus numeri 1 = 1.

Demonſt. 1°. Attractio quam patitur corpus C ex parte ſphæræ A, repræſentatur per fractionem cujus numerator eſt quantitas materiæ ſphæræ A, & denominator quadratum diſtantiæ corporis C à centro ejuſdem ſphæræ, hoc eſt, attractio quam patitur corpus C ex partæ ſphæræ A repræſentatur per fractionem $\frac{1000}{100} = 10$.

2°. Eamdem propter cauſam attractio quam patitur corpus D ex parte ſphæræ B, repræſentatur per fractionem $\frac{1}{1} = 1$; ergo attractio quam patitur C ex parte ſphæræ A: ad attractionem quam patitur corpus D ex parte ſphæræ B :: 10 : 1.

3°. Datur ejuſdem corollarii algebrica demonſtratio quæ jure dicitur formula generalis. Vocetur ergo M moles ſphæræ A, R radius ejus, P vis centripeta, ſeu attractio paſſiva corporis C in ſuperficie ſphæræ A conſtituti. Vocetur

etiam m moles ſphæræ B, r radius ejus, p vis centripeta, ſeu attractio paſſiva corporis D in ſuperficie ſphæræ B collocati. Habentur evidenter æquationes ſequentes, $P = \frac{M}{RR}$, & $p = \frac{m}{rr}$.

4°. $M : m :: RRR : rrr$; ſunt enim ſphæræ homogeneæ ſicut cubi radiorum ſuorum; ergo $P = \frac{R^3}{R^2} = R$, & $p = \frac{r^3}{r^2} = r$; ergo $P : p :: R : r$; ergo attractio paſſiva corporis C in ſuperficie ſphæræ A collocati: ad attractionem paſſivam corporis D in ſuperficie ſphæræ B poſiti :: radius ſphæræ A : ad radium ſphæræ B; ergo duo corpora æqualia in ſuperficie duarum ſphærarum æqualis denſitatis & diverſæ magnitudinis collocata, attrahuntur in ratione directa radiorum ſphærarum earumdem.

5°. Duo corpora æqualia in interiori ſphærâ homogeneâ conſtituta, attrahuntur versùs centrum in ratione directa diſtantiarum ſuarum ab hoc centro.

Sint, *v. g.*, duo corpora æqualia F & G, *fig. 47*, *tab. 3*, conſtituta in interiori ſphæra homogenea A I B. Corpus G diſtet à centro C unâ leucâ, & corpus F duabus leucis; dico quòd corpus G duplò minùs attrahetur versùs centrum C, quàm corpus F; ſeu, quod idem eſt, dico quòd attractio paſſiva corporis G : ad attractionem paſſivam corporis F :: 1 : 2. Hæc enim duo corpora ſunt quaſi conſtituta ſuper ſuperficiem duarum ſphærarum homogenearum, quarum prior radium haberet unius leucæ, & poſterior radium duarum leucarum.

COROLLARIUM II.

Attractio nulla eſt quæ ſit in ratione inverſa cuborum diſtantiarum.

Explic. Diſcrimen magnum eſt inter attractionem in ratione inverſa quadratorum, & attractionem in ratione inverſa cuborum diſtantiarum. Si attractio ſequatur rationem inverſam quadratorum diſtantiarum, corpus A diſtans

à centro terræ 1 radio terreſtri, centies magis attrahetur, quàm idem corpus A diſtans à centro terræ 10 radiis terreſtribus; quadratum enim numeri 1 = 1, & quadratum numeri 10 = 100. Si attractio ſequatur rationem inverſam cuborum diſtantiarum, corpus A diſtans à centro terræ 1 radio terreſtri milliès magis attrahetur, quàm idem corpus A diſtans à centro terræ 10 radiis terreſtribus; cubus enim numeri 1 = 1, & cubus numeri 10 = 1000.

Ex cohærentia corporum infert Nevvtonus (quæſtione XXXI optices) *particulas ipſorum attrahere ſe vi aliquâ quæ in ipſo contactu ſit perquàm magna.* Per hanc vim exponit duritiem corporum, chymicos omnes effectus, tuborum capillarium phœnomena &c. Hinc concludunt Nevvtoniani attractionem eſſe geminam, alteram in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum, quæ agat in diſtantiis majoribus, & quæ cauſa ſit gravitatis corporum; alteram in ratione inverſa cuborum diſtantiarum, quæ agat in diſtantiis minimulis, & quæ inſerviat ad exponendam duritiem, multaque phœnomena terreſtria quæ primo quidem aſpectu videntur eſſe difficillima. Quàm evidenter erraverint & Nevvtonus & Nevvtoniani, id manifeſtum erit ex iis quæ dicenda ſuperſunt.

1°. Demonſtravit Nevvtonus attractionem eſſe legem aliquam generalem naturæ quæ ſequitur rationem inverſam quadratorum diſtantiarum. Quo ſuppoſito, ſic argumentor:

Lex eadem naturæ non poteſt nunc ſequi rationem inverſam quadratorum, nunc verò rationem inverſam cuborum diſtantiarum; nam immutabiles ſunt naturæ leges; ergo ſi demonſtratur attractionem aliquando ſequi rationem inverſam quadratorum, nulla datur attractio quæ ſequatur umquam rationem inverſam cuborum diſtantiarum.

2°. Etiamſi dari poſſet lex aliqua attractionis quæ ſequeretur rationem inverſam cuborum diſtantiarum, neque tamen per hanc legem exponenda eſſent phœnomena tuborum capillarium, duritiei corporum, chymiæ &c.; ergo admittenda non eſt lex hujuſmodi. Prob. ant. Non debent exponi phœnomena phyſica per legem aliquam naturæ,

cùm exponi poſſunt per cauſas ſecundas, immediatas & mecanicas; atqui phœnomena tuborum capillarium, duritiei corporum, chymiæ &c., exponi poſſunt per cauſas ſecundas, immediatas & mecanicas, ut videre eſt in ſexcentis Phyſicæ tractatibus; ergo non debent exponi per legem aliquam naturæ, *v. g.*, per legem attractionis quæ ſequatur rationem inverſam cuborum diſtantiarum.

At inquies. Exponere poſſunt Nevvtoniani gravitatem corporum per legem aliquam attractionis quæ ſequatur rationem inverſam quadratorum diſtantiarum; ergo à pari exponere poſſunt duritiem corporum per legem aliquam attractionis quæ ſequatur rationem inverſam cuborum diſtantiarum.

Reſp. conc. ant. & neg. æquam & paritatem. 1°. Demonſtrant Nevvtoniani exiſtere legem aliquam attractionis quæ ſequatur rationem inverſam quadratorum diſtantiarum; illi verò non demonſtrant, imò quidem tantummodò ſupponunt exiſtere legem aliquam attractionis quæ in diſtantiis minimulis ſequatur rationem inverſam cuborum diſtantiarum. 2°. Corporum gravitas exponi non poteſt per cauſam aliquam ſecundam, immediatam & mecanicam, ut probabitur inferiùs; contra verò phœnomena tuborum capillarium, duritiei corporum & chymiæ rectè admodùm exponuntur à multis primæ notæ Phyſicis per cauſas ſecundas, immediatas & mecanicas, ut mox annotavimus.

COROLLARIUM III.

Non dantur in natura leges generales repulſionis.

Explicatur. Non modò leges generales attractionis, ſed & leges generales repulſionis Nevvtonus admiſit. Sic enim loquitur quæſtione XXXI optices. (Sicut in algebra ubi quantitates affirmativæ evaneſcunt & deſinunt, ibi negativæ incipiunt; ita in mecanicis ubi attractio deſinit, ibi vis repellens ſuccedere debet. Talis autem vis aliqua ut ſit, conſequi videtur ex reflexionibus & inflexionibus lucis: nam in utroque horum caſuum repelluntur radii à corpo-

ribus, ſine immediato contactu corporis reflectentis vel inflectentis. Videtur etiam conſequi ex emiſſione luminis: nam radius, ſimul ac è lucente corpore per vibrantem partium ipſius motum excuſſus ſit, & è ſphæra attractionis ejus evaſerit, ingenti admodùm velocitate propellitur.... Videtur etiam conſequi ex productione aeris & vaporum: nam particulæ è corporibus excuſſæ per calorem vel fermentationem, ſimul ac è ſphæra attractionis corporis ſui evaſerint, recedunt deinceps & ab illo & à ſe invicem magna cum vi; rurſùmque accedere fugiunt: ità ut nonnumquam ampliùs deciès centiès milliès tantum ſpatii occupare comperiantur, quàm quantum cùm corporis denſi formam haberent: quæ tam ingens contractio & expanſio, animo ſanè concipi vix poteſt.... niſi ita ſi vim repellentem habent, quâ à ſe mutuò fugiant.... Eidem vi repellenti tribuendum videtur quòd muſcæ in aqua inambulent, nec tamen pedes ſuos madefaciant... Atque hæc quidem omnia ſi ità ſint, jam natura univerſa valdè erit ſimplex & conſimilis ſuî: perficiens nimirùm magnos omnes corporum cæleſtium motus, attractione gravitatis, quæ eſt mutua inter corpora illa omnia; & minores ferè omnes particularum ſuarum motus, aliâ aliquâ vi attrahente & repellente, quæ eſt inter particulas illas mutua.)

Hinc ſequitur 1°. Nevvtonum admiſiſſe leges repulſionis tanquam leges generales naturæ. Quanam in ratione creſcat aut decreſcat vis repellens, id neque determinavit Nevvtonus, neque determinaverunt Nevvtoniani.

Sequitur 2°. per leges repulſionis Nevvtonum explicuiſſe luminis reflexionem, rarefactionem aeris &c. Quàm falſæ ſint explicationes hujuſmodi, id jam probandum incumbit.

Prob. 1°. Temerè & abſque fundamento leges repulſionis Nevvtonus admiſit; ergo rejiciendæ ſunt leges hujuſmodi. Prob. ant. Ex eo quòd in algebra ſint quantitates negativæ, & ex eo quòd muſcæ in aqua inambulantes pedes ſuos non madefaciant; inde Nevvtonus infert leges repulſionis exiſtere; ergo temerè & abſque fundamento leges repulſionis Nevvtonus admiſit.

Prob. 2°. Reflexio luminis, aeris rarefactio, repulsiones magneticæ & electricæ &c., exponi possunt per causas secundas, immediatas & mecanicas, ut videre est in multis Physicæ tractatibus; ergo hæc & similia phœnomena exponi non debent per leges generales repulsionis.

ARTICULUS II.

De præcipuo legum attractionis effectu.

GRavitas corporum est absque controversia præcipuus legum attractionis effectus. Sit igitur.

QUÆSTIO UNICA.

De Gravitate corporum.

1°. LOquimur tantùm in hac quæstione de gravitate corporum sublunarium. Quod enim de Terra pronunciabitur respectu corporum circum-terrestrium, hoc & dicetur de sole respectu corporum quæ versùs astrum hujusmodi continuò gravitant.

2°. Corpus illud est grave, quod tendit versùs centrum Terræ; corpus illud foret leve, quod per seipsum & ex natura sua tenderet ad fugiendum à centro Terræ. Quàm evidens est dari multa corpora gravia, tàm evidens est nullum dari corpus absolutè leve.

3°. Corpora præcisè prout corpora, seu corpora in statu purè metaphysico considerata, neque gravia sunt, neque levia; sive enim constituantur in centro, sive procul à centro Terræ, id prorsùs ipsis indifferens est.

4°. Quærimus hîc utrùm, attractionis ope, exponi possint omnia phœnomena gravitatem corporum sublunarium spectantia. Ut solvatur hæc quæstio, sit.

PROPOSITIO UNICA.

Per attractionem Nevvtonianam rectè & facilè explicantur omnia phœnomena gravitatem corporum ſublunarium ſpectantia.

Prob. Sint, inſtar omnium phœnomenorum, hæc tria præcipua. 1°. Corpora gravia ſublunaria, ſibi derelicta, in terram decidunt. 2°. Corpora gravia ſublunaria in terram decidunt per lineas ſuperficiei terreſtri perpendiculares. 3°. Gravitas corporum ſublunarium eſt in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum à centro terræ.

Per attractionem rectè & facilè explicantur hæc tria phœnomena. Ac primò quidem ideò corpora ſublunaria, ſibi derelicta, in terram decidunt, quia ſcilicet magis attrahuntur à Terra, quàm attrahunt Terram.

2°. Ideò corpora ſublunaria in terram decidunt per lineas terreſtri ſuperficiei perpendiculares, quia ſcilicet in terram decidunt per lineam directionis vis attractivæ terræ; quæ linea, cùm tranſeat per centrum terræ, neceſſariò perpendicularis eſt illius ſuperficiei.

Denique gravitas corporum ſublunarium eamdem omninò rationem ſequitur, ac vis attractiva terræ; ſed vis attractiva terræ ſequitur rationem inverſam quadratorum diſtantiarum, ergo &c.

Solvuntur argumenta oppoſita.

Obj. 1°. Malè explicantur in ſyſtemate Nevvtoniano tria phœnomena mox propoſita: quod probatur enumeratione ſequenti. Ac primò quidem Nevvtoniani contendunt attractionem eſſe mutuam; ergo corpora gravia ſublunaria non magis attrahuntur à Terra, quàm attrahunt Terram, & conſequenter propter vim attractivam Terræ corpora gravia ſublunaria numquam in Terram decidere deberent.

2°. Explicatio ſecundi phœnomeni, nempe deſcensûs corporum gravium ſublunarium per lineas ſuperficiei terreſtri perpendiculares, hæc, inquam, explicatio ſupponit Terram

Terram esse sphæricam ; atqui falsa est hæc suppositio, ergo & falsa est explicatio secundi phœnomeni.

3°. Sive corpus A distet à superficie Terræ uno pede, vel unâ leucâ, corpus A eodem prorsùs modo attrahitur à Terra ; ergo vis attractiva Terræ non sequitur rationem inversam quadratorum distantiarum.

Resp. ad 1. dist. ant. Newtoniani contendunt attractionem esse mutuam, & illi addunt attractionem esse simul in ratione directa molium, conc. ant. Newtoniani contendunt attractionem esse mutuam præcisè, neg. ant. & c̃quam. Newtoniani docent quòd vis per quam Terra attrahit corpus sublunare A unius libræ : ad vim per quam corpus A attrahit Terram : : moles Terræ : ad molem corporis A ; ergo vis attractiva Terræ vincere debet vim attractivam corporum omnium sublunarium ; nullum est enim corpus sublunare cujus moles æqualis sit globo terrestri.

Ad 2. dist. maj. Explicatio secundi phœnomeni supponit Terram sphæricam esse sensibiliter, conc. maj. realiter & geometricè, neg. maj. & sic dist. min. neg. c̃quam. Terra quam incolimus, sensibiliter tantùm est sphærica ; est enim realiter sphæroïs versùs æquatorem intumescens, & suis in polis depressa. Cùm igitur affirmant Physici, sive cartesiani sint, sive Newtoniani, corpora gravià sublunaria in superficiem terrestrem cadere secundùm lineas perpendiculares, & ferri versùs centrum Terræ, loquuntur illi de his quæ sensibiliter, non verò de his quæ realiter eveniunt.

Hinc sequitur corpora gravia sublunaria in terrestrem superficiem decidere per lineas sensibiliter tantùm, non verò geometricè parallelas ; si enim corporum illorum producerentur lineæ directionis, convenirent illæ lineæ, non præcisè in centro Terræ, sed in puncto à centro Terræ non multùm remoto.

Ad 3. conc. ant. & neg. c̃quam. Sive corpus A distet à superficie Terræ uno pede, vel unâ leucâ, eodem sensibiliter modo distat à centro Terræ ; radius enim terrestris

est 1500 leucarum, aut circiter; ergo corpus A distans a superficie Terræ unâ leucâ, debet eodem sensibiliter modo attrahi versùs centrùm, ac idem corpus A distans uno tantùm pede à superficie eâdem; vis enim attractiva Terræ non sequitur rationem inversam quadratorum distantiarum à superficie, sed quadratorum distantiarum à centro Terræ.

Obj. 2°. Sexcentis experimentis compertum est gravitatem corporum multò minorem esse sub æquatore, quàm sub polis; atqui id exponi non potest in attractionis systemate; ergo in illo systemate exponi non possunt omnia phœnomena gravitatem corporum sublunarium spectantia. Prob. min. Corpora tàm attrahuntur à Terra sub æquatore, quàm sub polis; ergo prædictum phœnomenum exponi non potest in systemate Newtoniano.

Antequam exponatur illud phœnomenum, hæc mihi videntur esse necessariò præmittenda. 1°. Gravitas corporum sublunarium non est ubique uniformis, sed est in ratione inversa quadratorum distantiarum à centro Terræ.

2°. Vis centrifuga gravitati directè opposita, est vis quâ corpora in orbem circumacta nituntur à centro suo recedere; illa æqualis est, ut demonstrabitur in capite septimo, quadrato velocitatis diviso per diametrum circuli descripti.

3°. A motu diurno Terræ circà suum axim vim centrifugam habent tum omnia puncta terrestria, tum omnia corpora quæ in nostra reperiuntur athmosphæra.

4°. Major est vis centrifuga circà æquatorem terrestrem, quàm circà tropicos; major etiam circà tropicos, quàm circà polos: quo enim tempore punctum terrestre versùs polos positum circuitionem unam minimam conficit, eodem tempore punctum terræ in æquatore constitutum circuitionem maximam absolvit. His præmissis.

Resp. ad 1. conc. maj. & neg. min. Ad 2. dist. ant. Corpora sublunaria tàm & eodem modo attrahuntur à Terra sub æquatore, quàm sub polis, neg. ant. tàm & modo longè diverso, conc. ant. & neg. cquam. Ideò corpora sublunaria minùs gravia sunt sub æquatore, quam sub

polis, quia ſcilicet ſub æquatore majorem habent vim centrifugam, & magis diſtant à centro Terræ, quàm ſub polis. Hæc patent ex præmiſſis. Memineritis dumtaxat corpora ſub æquatore conſtituta, propter ſphæroïdalem Terræ figuram, magis diſtare à centro Terræ, quàm ſi collocarentur ſub polis.

Hinc non mirum eſt quòd, non procul ab æquatore, horologia quæ vulgò pendula vocantur, ſuas longiori tempore vibrationes abſolvendo, aliquam, ut aiunt, patiantur retardationem; non mirum etiam appareat eò magis imminuendam eſſe penduli longitudinem, quò propiùs ad æquatorem acceditur.

Inſt. Retardatio penduli ſub æquatore tribui debet calori nimio in illis regionibus regnanti, ergo tribui non debet minori gravitati corporum ſub æquatore conſtitutorum. Prob. ant. Ideò Pendula ſub æquatore retardationem aliquam patiuntur, quia ſcilicet dilatatur metallum; ideò autem dilatatur metallum, quia ſcilicet nimius calor in illis plagis regnat; ergo retardatio penduli ſub æquatore tribui debet calori nimio in illis regionibus regnanti.

Reſp. ad 1. diſt. ant. Retardatio aliqua Penduli ſub æquatore tribui debet calori nimio in illis regionibus regnanti, conc. ant. Totalis retardatio Penduli ſub æquatore tribui debet calori nimio, neg. ant. & c̃quam.

Ad 2. conc. ant. & diſt. c̃quens & ſuprà. Centies experti ſunt Phyſici, inter quos annumerandus eſt Dominus de Mairan, calorem aquæ efferveſcentis tribuere non poſſe metallo dilatationem illam quæ neceſſaria foret ad explicationem tanti Phœnomeni. Et verò retardatio Penduli ſub æquatore tribui non poteſt dilatationi metalli, quin ſupponatur metallum per dilatationem duabus ſaltem lineis longius factum fuiſſe. Conſtat autem experientiâ per calorem aquæ efferveſcentis tribui dumtaxat metallo dilatationem tertiæ partis unius lineæ. Hinc igitur inferamus retardationem Penduli ſub æquatore præcipuè tribuendam eſſe minori gravitati corporum ſublunarium.

At inquies. Si attractio gravia reddat omnia omnino

corpora, quânam de causâ videmus certa corpora sublunaria Terram identidem fugere?

Resp. Nullum est corpus sublunare quod per seipsum & propter levitatem aliquam absolutam Terram fugiat. Tribuenda est hæc fuga levitati alicui relativæ, vel aliis causis extrinsecis quarum enumeratio non est hujus loci.

COROLLARIUM. I.

Corpora gravia liberè decidentia ità motum suum accelerant, ut, si spectetur spatium percursum temporibus sensibiliter æqualibus, sibi invicem succedentibus, spatium percursum primo tempore sit subtriplum spatii percursi secundo tempore, & subquintuplum spatii percursi tertio tempore; hoc est, si primo tempore corpus A percurrat unum pedem, secundo tempore percurret 3 pedes, tertio 5, quarto 7, quinto 9; & ità deinceps secundum proportionem arithmeticam numerorum imparium, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c. Præclarum illud inventum, quod accepimus à Galilæo, sexcentis fuit experimentis comprobatum. Quotidie enim experimur quòd corpora gravia, non procul à superficie Terræ posita, intrà unum minutum secundum temporis decidendo percurrunt 15 pedes, intrà duo minuta secunda 60, intrà tria minuta secunda 135 &c. Antequam autem exponatur illud phœnomenum, hæc mihi videntur esse necessariò præmittenda.

1°. Corpus aliquod movetur motu accelerato, quando instanti quolibet temporis infinitè parvo accipit velocitatem acceleratricem infinitè parvam.

2°. Corpus illud movetur motu uniformiter accelerato, quod temporibus æqualibus accipit æqualem velocitatem acceleratricem.

3°. Corpus quod movetur motu uniformiter accelerato propter velocitatem aliquam æquabiliter temporibus æqualibus acquisitam, dimidium dumtaxat conficit spatium illius quod confecisset, si velocitas illa, tota simul & perseveranter existens, mobile suum detulisset toto illo tempore.

Sit res in exemplo. Suppono 1°. ; corpus B, *fig. 1. tab. 6*, percurrere ſpatium aliquod determinatum motu quodam uniformiter accelerato. Suppono 2°. idem corpus B æqualibus temporibus accipere æqualem velocitatem acceleratricem, ita ut in fine primi inſtantis, deſignati per lineam BE, habeat unum gradum velocitatis deſignatum per lineam E*n*; in fine ſecundi inſtantis EF, habeat duos gradus velocitatis deſignatos per lineam F*o*; in fine tertii inſtantis FG, habeat tres gradus velocitatis deſignatos per lineam G*p*; in fine quarti inſtantis GH, habeat quatuor gradus velocitatis deſignatos per lineam H*q*; & in fine quinti inſtantis HA, habeat quinque gradus velocitatis deſignatos per lineam AC. Dico quòd corpus B ſpatium duplum percurriſſet, ſi ſtatim illos quinque gradus velocitatis habuiſſet; idque ſic paucis evinco.

Quoniam linea BA, & quinque lineæ E*n*, F*o*, G*p*, H*q*, AC repræſentant varias velocitates variis temporibus acquiſitas, triangulum BAC optimè repræſentabit totum ſpatium percurſum à corpore B intrà quinque inſtantia BE, EF, FG, GH, HA. Et verò area trianguli BAC repræſentat collectionem omnium velocitatum pro ſingulis inſtantibus exiſtentium in corpore B; ergo area trianguli BAC repræſentat totum ſpatium percurſum à corpore B: nam collectio omnium velocitatum nihil eſt aliud quàm collectio totius ſpatii decurſi.

Jam verò ſupponamus corpus B habuiſſe in puncto B illos quinque gradus velocitatis quos habuit in puncto A, evidens eſt quòd variæ lineæ BD, EI, FK, GL, HM, AC repræſentabunt illas omnes velocitates quas habuit corpus B in variis punctis B, E, F, G, H, A, & conſequenter evidens eſt quòd quadrilaterum BACD repræſentabit ſpatium percurſum à corpore B intrà quinque inſtantia BE, EF, FG, GH, HA. Sed quadrilaterum BACD duplum eſt trianguli BAC; ergo corpus B ſpatium duplum percurriſſet, ſi ſtatim ſuos quinque gradus velocitatis habuiſſet.

4°. Quoniam gravitas corporum ſublunarium eadem eſt

non ſolùm in diſtantiis à centro Terræ æqualibus, ſed etiam in diſtantiis quæ non ſunt ſenſibiliter diverſæ, gravitas corporum conſiderari poteſt tanquam vis aliqua quæ inſtanti quolibet temporis infinitè parvo, communicat Mobili decidenti velocitatem infinitè parvam, ac proindè conſiderari poteſt tanquam vis quæ, temporibus æqualibus, velocitatem æqualem Mobili decidenti communicat.

His præmiſſis, facilè admodùm exponitur quânam de causâ acceleratio motûs corporum gravium liberè decidentium fiat ſecundùm proportionem arithmeticam numerorum imparium. Suppono igitur corpus A, *fig. 2. tab. 6*, percurrere intrà tria inſtantia lineam A B novem pedum, ita ut in fine cujuslibet inſtantis accipiat unum gradum velocitatis acceleratricis; dico quòd corpus A percurret intrà ſecundum inſtans 3 pedes, & intrà tertium inſtans 5 pedes, ſupponendo quòd unum pedem intrà primum inſtans percurrerit.

Dem. 1°. Corpus A, inſtanti primo, percurrit unum pedem propter unum gradum velocitatis quem ſucceſſivè acquirit, ſeu potiùs, quem habet in ſtatu acquiſitionis actualis, *ex ſuppoſitione*; ergo quando corpus A reperitur in puncto C, tum habet unum gradum velocitatis acquiſitum, ſeu in ſtatu permanentiæ.

2°. Corpus A, inſtanti ſecundo, duos habet gradus velocitatis, quorum alter eſt in ſtatu permanentiæ, & alter in ſtatu acquiſitionis; ergo corpus A debet, inſtanti ſecundo, percurrere tres pedes, duos nempè propter unum gradum velocitatis quem habet in ſtatu permanentiæ, & unum pedem propter illum gradum velocitatis quem habet in ſtatu acquiſitionis.

3°. Corpus A, inſtanti tertio, tres habet gradus velocitatis, quorum duo ſunt in ſtatu permanentiæ, & tertius in ſtatu acquiſitionis; ergo corpus A debet, inſtanti tertio, 5 pedes percurrere, 4 nempè propter duos gradus velocitatis quos habet in ſtatu permanentiæ, & unum pedem propter illum gradum velocitatis quem habet in ſtatu acquiſitionis; ergo acceleratio motûs corporum gra-

vium liberè decidentium fieri debet ſecundùm proportionem arithmeticam numerorum imparium *q. e. d.*

At inquies. Verumne eſt accelerationem corporum gravium tandem finem habere, fierique motum illorum æquabilem?

Reſpondeo id evenire, cùm deſcenſus gravium fit in ſpatio aere pleno. Tanta eſt enim, ſub finem deſcensûs corporum gravium, reſiſtentia aeris, ut, ſingulis inſtantibus, tantumdem de velocitate detrahat, quantùm de novo acquiritur. Nequè profectò id mirum videbitur, ſi attendatur reſiſtentiam aeris creſcere pro ratione ſpatii percurſi, & velocitatem acceleratricem non creſcere, niſi in diſtantiis ſenſibiliter diverſis à centro Terræ.

Quæres iterum utrum omnia corpora gravia, ſupra ſuperficiem Terræ poſita, decidendo percurrant 15 pedes intrà primum minutum ſecundum temporis?

Reſpondeo quòd hæc evenirent, ſi corpora ſuprà ſuperficiem Terræ poſita deciderent in ſpatio vacuo. In ſpatio autem aere pleno ſola corpora gravia, quæ magnam materiæ propriæ quantitatem continent ſub volumine parvo, 15 pedes percurrunt intrà primum minutum ſecundum temporis; tales ſunt globi aurei, ferrei &c.

COROLLARIUM II.

Spatia percurſa à corpore gravi liberè decidente ſunt in ratione directa quadratorum temporum ſumptorum ab initio motûs, hoc eſt, ſpatium quod percurrit corpus A per primum inſtans: ad ſpatium quod percurrit idem corpus A per duo prima inſtantia :: 1 : 4.

Dem. Corpus A, liberè cadendo, percurrit per primum minutum ſecundum temporis 15 pedes, & per duo prima minuta ſecunda temporis percurrit 60 pedes, ut ſuperiùs vidimus; ergo ſpatium quod percurrit corpus A per primum minutum ſecundum temporis: ad ſpatium quod percurrit per duo prima minuta ſecunda :: 1 : 4, nam 15 : 60 :: 1 : 4; ergo ſpatia percurſa à corpore

gravi liberè decidente ſunt in ratione directâ quadratorum temporum ſumptorum ab initio motûs.

Vocentur igitur *e* ſpatium percurſum per primum inſtans, E ſpatium percurſum per duo prima inſtantia, *e* primum inſtans, T duo prima inſtantia; locum habebit proportio ſequens, $e : E :: t^2 : T^2$.

COROLLARIUM III.

Velocitates acquiſitæ deſcenſu gravium ſe habent ut tempora. Vocentur ergo *u* velocitas quam habet corpus A in fine primi temporis, V velocitas quam habet idem corpus A in fine ſecundi temporis, *t* primum tempus, T ſecundum tempus; locum habebit proportio ſequens, $u : V :: t : T$.

Dem. Corpus A poſt primum minutum ſecundum temporis, ſeu poſt primum tempus, habet unum gradum velocitatis acquiſitæ; item corpus A poſt duo prima minuta ſecunda temporis, ſeu poſt ſecundum tempus, habet duos gradus velocitatis acquiſitæ. Quo ſuppoſito, ſic argumentor; 1 gradus velocitatis : ad 2 gradus velocitatis :: 1 minutum ſecundum : ad 2 minuta ſecunda; ergo $u : V :: t : T$.

COROLLARIUM IV.

Velocitates acquiſitæ deſcenſu gravium ſe habent ut radices quadratæ ſpatiorum percurſorum, ac proinde locum habet hæc proportio, $u : V :: \sqrt{e} : \sqrt{E}$.

Dem. $u : V :: t : T$, *ex coroll.* 3; ergo $u^2 : V^2 :: t^2 : T^2$. Sed $t^2 : T^2 :: e : E$, *ex coroll.* 2; ergo $u^2 : V^2 :: e : E$; ergo $u : V :: \sqrt{e} : \sqrt{E}$.

COROLLARIUM V.

Tempora ſunt inter ſe ut radices quadratæ ſpatiorum, ac proinde haberi poteſt proportio ſequens, $t : T :: \sqrt{e} : \sqrt{E}$.

Dem. $t : T :: u : V$, *ex coroll.* 3; ſed $u : V :: \sqrt{e} : \sqrt{E}$, *ex coroll.* 4; ergo $t : T :: \sqrt{e} : \sqrt{E}$.

COROLLARIUM VI.

Centrum gravitatis corporis illud eſt per quod corpus dividitur in duas partes æquiponderantes, ſeu, ſi mavis, centrum gravitatis eſt punctum in quolibet corpore gravi poſitum, per quod ſi ſuſpendatur corpus, omnes illius partes, quemcumque iis dederis ſitum, hunc ſervabunt, adeòque futuræ ſunt in æquilibrio. Mos eſt apud mechanicos ſumere centrum gravitatis pro toto corpore gravi; hi enim totam corporis gravitatem in hoc centro reſidere ſupponunt; hi etiam ſequentes obſervationes locum principii habere volunt.

1°. Per centrum magnitudinis corpus dividitur in duas partes æquales, & per centrum gravitatis corpus dividitur in duas partes æquiponderantes. Non igitur in idem punctum confluunt centrum gravitatis & centrum magnitudinis, niſi in corporibus perfectè homogeneis.

2°. Linea directionis corporum gravium ſublunarium eſt linea recta quæ à centro gravitatis corporum ad centrum Terræ porrigi intelligitur.

3°. Corpus grave numquam decidit, niſi ſimul decidat centrum illius gravitatis.

4°. Corpus grave, liberè decidens, lineam directionis corporum gravium numquam relinquit.

5°. Corpus grave firmum in ſuâ baſi conſiſtet, quandiu linea directionis extrà baſim ejus non exibit; contrà verò corpus grave prolabetur, cum linea directionis extra baſim ejus egredi intelligetur.

6°. Nullius corporis centrum gravitatis, niſi violenter, aſcendere poteſt.

7°. Centrum gravitatis corporum ſublunarinm ſemper nititur accedere ad centrum Terræ.

8°. Cùm decidit corpus grave, compoſitum ex partibus heterogeneis, centrum gravitatis occupat partem inferiorem hujus corporis; contrà verò partem ſuperiorem occupat, ſi hoc idem corpus cogatur aſcendere. Neque

id mirum videbitur, si attendatur quòd in corpore A, *v. g.*; compositò ex ligno & ferro, centrum gravitatis reperitur in parte ferrea, ac proindè reperitur in parte donata majori vi; ergo, descendente corpore A, centrum ejus gravitatis occupare debet partem inferiorem, & ascendente corpore A, centrum ejus gravitatis occupare debet partem superiorem hujus corporis. Hæc omnia ità sunt perspicua, ut locum principii teneant apud omnes omninò Mecanicos.

Ex iis Principiis hæc necessariò sequuntur. 1°. Si corpus P; *fig. 83, tab. 5*, suspendatur ex puncto C, corpus illud non movebitur, si centrum ejus gravitatis reperiatur in linea directionis CP corporum gravium; in illo enim statu corpus P tantùm accedit ad centrum Terræ, quantùm accedere potest.

2°. Si idem corpus P removeatur in N vel *n*, corpus illud per gravitatem suam relabetur in punctum P; illius enim centrum gravitatis minùs distat à centro Terræ in puncto P, quàm in punctis N & *n*.

At inquies. Quânam de causâ corpus P descendens ex puncto N in punctum P, non quiescit in puncto P, sed ex puncto P ascendit in punctum *n*; ex puncto *n* descendit in punctum P; ex puncto P ascendit in punctum N; ex puncto N descendit in punctum P, in quo non quiescit nisi post aliquot itus & reditus?

Resp. Corpus P descendit ex puncto N in punctum P per gravitatem suam, quia scilicet in puncto P. minùs distat à centro Terræ, quàm in puncto N. Sed corpus P, descendendo ex puncto N in punctum P, acquisivit accelerationes quæ ipsum ferunt ex puncto P in punctum *n*; ergo corpus P descendere debet ex puncto N in punctum P, & ascendere debet ex puncto P in punctum *n*.

Eodem prorsùs modo explicatur quânam de causâ corpus P descendat ex puncto *n* in punctum P, & ascendat ex puncto P in punctum N; imò quidem descensus & ascensus reciprocus corporis P, perpetuus foret, si locum haberet in vacuo. Hinc inferre licet non ità difficile esse

explicare motum oſcillationis horologiorum quæ vulgò *Pendula* vocantur.

3°. Nemo vel ſtare, vel ambulare poteſt, niſi linea ipſius directionis intrà ipſius baſim deſcendat. Eſt autem baſis hominis, vel ſpatium comprehenſum intrà duos pedes, cùm homo utroque pede nititur; vel unus pes dumtaxat, cùm homo altero tantùm ſtat pede.

4°. Si quis ſtet rectus, & ad parietem incumbat, cum humeris, tum pedibus, is nummum humi jacentem non colliget, quin humi procumbat. Cùm enim prædictus homo nummum colligere cupit, is primùm caput & pectus educit in anteriora. Non poteſt autem caput & pectus in anteriora educere, quin centrum gravitatis, mediâ fermè corporis parte conſiſtens, deſinat correſpondere pedibus. Si centrum gravitatis deſinit correſpondere pedibus, linea directionis non deſcendet intrà baſim hujus hominis, qui tum humi neceſſariò procumbet.

5°. Difficillimum eſt ambulare vel in funè, vel in trabe anguſta; linea enim directionis hominis ſic ambulantis, facilè poteſt excurrere vel extrà funem, vel extrà trabem; quod ſi acciderit, caſum non declinabit homo ambulans.

6°. Eò firmiùs ſtant corpora, quò latiores habent baſes, & eò facilius decidunt, quò illas habent anguſtiores. Hinc conus vix conſiſtere poteſt in apice, facilè verò in parte latiore ſtatuitur.

7°. Non mirum eſt quòd hominis latiores ſint pedes, quàm animalium quadrupedum. Baſis enim animalium quadrupedum eſt ſpatium inter quatuor pedes comprehenſum; contrà verò baſis hominis deſignatur per ſpatium duos inter pedes conſtitutum.

8°. Neceſſarium eſt, dum pondus ingens unâ manu ſuſtentamus, ut corpus inclinemus in partem oppoſitam. Cùm enim tunc aliud centrum gravitatis oriatur, vicinius ponderi adjecto, corpus eſt inclinandum, ut linea directionis per pedes, vel potiùs inter pedes tranſeat.

COROLLARIUM VII.

In ſyſtemate Newtoniano centrum gravitationis variorum corporum ſe invicem attrahentium nihil eſt aliud quàm hic ipſemet locus in quem convenirent hæc varia corpora attractioni ſuæ mutuæ derelicta. Centrum gravitationis ſolis & planetarum omnium circà ſolem girantium reperitur in illo cœli puncto in quo fieret conjunctio illorum omnium corporum attractioni ſuæ mutuæ derelictorum. Hîc igitur quæri poteſt ubinam reperiatur centrum gravitationis ſolis & corporum omnium circà ſolem girantium. Ut ſolvatur hæc quæſtio, ſit

PROBLEMA I.

Invenire centrum gravitationis ſolis & corporum omnium circà ſolem girantium.

Præparatio. 1°. Si repræſentetur diameter ſolis per numerum 100, tùm ſenſibiliter repræſentabitur diameter ſaturni per numerum 9, diameter jovis per numerum 11, diameter martis per fractionem $\frac{3}{5}$, diameter Terræ per numerum 1, diameter veneris per numerum 2, diameter mercurii per fractionem $\frac{1}{3}$. Dixi, *ſenſibiliter*, nam diameter jovis eſt paulò inferior numero 11, & diameter Saturni paulò ſuperior numero 9.

2°. Sole minùs denſi ſunt Mars, Jupiter & Saturnus; ſunt autem ſole denſiores Terra, Venus & Mercurius. Abſque igitur ſenſibilis erroris periculo ejuſdem denſitatis ſupponi poſſunt ſol & varia corpora circà ſolem girantia.

3°. Sunt inter ſe corpora ſphærica ſicut cubi diametrorum ſuarum. Eam ob rem numeri 1000000, 729, 1331, $\frac{27}{125}$ ſeu $\frac{1}{5}$ aut circiter, 1, 8, $\frac{1}{27}$ exhibent magnitudines reſpectivas ſolis, Saturni, Jovis, Martis, Terræ, Veneris & Mercurii. Poteſt igitur inſtitui proportio ſequens; moles ſolis : ad molem ſex illarum planetarum :: 1000000 : 2069 + $\frac{32}{135}$.

4°. Ut vitetur omnis error, ſupponatur moles cometa-

rum & planetarum omnium, tum primariorum, tum secundariorum, repræsentari per numerum 2400; habebitur proportio sequens, moles solis : ad molem corporum omnium circà solem girantium :: 1000000 : 2400.

5°. Ut vitetur omnis error in computationibus, supponatur planetas & cometas omnes à sole distare 60 millionibus leucarum.

6°. Diameter solis est 300000, & radius ejus 150000 leucarum; nam diameter solis est centies major diametro Terræ, quæ ultima diameter est 3000 leucarum.

Resolutio. Centrum gravitationis solis & corporum omnium circà solem girantium reperitur intrà solem, ad distantiam scilicet 6000 leucarum à solari superficie.

Demonstratio. Via quæ conficitur à variis corporibus attractioni suæ mutuæ derelictis, est in ratione inversâ molium sese invicem attrahentium, ut superiùs annotavimus. Habebitur ergo proportio sequens, moles solis, nempe 1000000 : ad molem planetarum & cometarum circà solem girantium, nempe 2400 : : via quam planetæ & cometæ conficient ut sese cum sole jungant, nempè 60000000 leucarum : ad viam quam sol conficiet, nempè ad 144000 leucarum. Ergo centrum gravitationis corporum mox appellatorum distat à centro solis centum quadraginta quatuor millibus leucarum; ergo centrum illud gravitationis reperitur intrà solem, ad distantiam scilicet sex millium leucarum à superficie solari; nam radius solis est 150000 leucarum.

ANNOTATIO.

Centrum gravitationis systematis solaris reponi potest absque errore sensibili in ipsomet centro solis. Et verò etiamsi planetæ omnes & cometæ in eodem prorsùs loco coadunarentur, nihilominùs tamen centrum gravitationis systematis solaris reperiretur intrà solem, ad distantiam scilicet sex millium leucarum ab illius superficie; ergo absque errore sensibili reponi potest centrum illud gravitationis in ipsomet centro solis : non solùm enim planetæ

& cometæ non coadunantur in eodem loco; sed etiam planeta unus reperitur in oriente, intereàdum alter versatur in occidente, ac proindè sæpè sese destruunt attractiones particulares quas in solem exercent Planetæ & cometæ.

PROBLEMA II.

Determinare molem circa quam corpus aliquod circulariter girat.

Præparatio. 1°. Vix acceleratrix, seu vis centripeta corporis cadentis proportionalis est moli corporis attrahentis divisæ per quadratum distantiæ corporis attracti. *Consule thesim de attractione.*

Vocetur ergo P vis centripeta corporis cadentis, M moles attrahens, D distantia, & D^2 quadratum distantiæ corporis attracti; habebitur æquatio sequens $P = \frac{M}{D^2}$.

2°. Vis centripeta corporis circulariter girantis æqualis est quadrato velocitatis corporis girantis divisо per diametrum circuli descripti. *Consule caput 7.*

Vocetur ergo P vis centripeta corporis circulariter girantis, D diameter circuli descripti, V velocitas, & V^2 quadratum velocitatis corporis girantis; habebitur æquatio sequens $P = \frac{V^2}{D}$.

3°. Velocitas corporis cujuscumque proportionalis est spatio percurso, divisо per tempus adhibitum in hoc spatio percurrendo. *Consule caput 1.*

Vocetur ergo V velocitas, S spatium, T tempus; habebitur æquatio sequens $V = \frac{S}{T}$.

4°. In hypothesi corporis circulariter girantis, spatium percursum nihil est aliud quàm circumferentia circuli. Vocetur autem C hæc circumferentia; habebitur sequens æquatio, $V = \frac{C}{T}$.

5°. Circumferentiæ circuli sunt inter se sicut diametri

circulorum eorumdem; habebitur ergo æquatio ſequens, $V = \frac{D}{T}$ & conſequenter $V^2 = \frac{D^2}{T^2}$.

6°. Sunt etiam circumferentiæ ſicut radii. Vocetur ergo R radius; habebitur æquatio ſequens, $V = \frac{R}{T}$, & conſequenter $V^2 = \frac{R^2}{T^2}$.

7°. Cùm agitur de corporibus circà centrum aliquod circulariter girantibus, diſtantia à centro per radium exprimitur. Convertitur ergo æquatio *numeri* 1 in æquationem $P = \frac{M}{R^2}$.

8°. Converti etiam poteſt æquatio *numeri* 2 in æquationem $P = \frac{V^2}{R}$; *conſule prop. 6 cap. 7.*

Reſolutio. Moles attrahens proportionalis eſt cubo diſtantiæ corporis circulariter girantis, diviſo per quadratum temporis adhibiti ad circulum percurrendum, ac proindè $M = \frac{R^3}{T^2}$.

Demonſtratio. 1°. $P = \frac{M}{R^2}$, ergo $M = P R^2$. *Conſule num. 1. & 7. præparationis.*

2°. $P = \frac{V^2}{R}$. *Conſule num. 2 & 8 præparationis.*

3°. $V^2 = \frac{R^2}{T^2}$; ergo $\frac{V^2}{R} = \frac{R^2}{RT^2}$; ergo $\frac{V^2}{R} = \frac{R}{T^2}$. *Conſule num. 4, 5, & 6 præparationis.*

4°. $P = \frac{V^2}{R}$, & $\frac{V^2}{R} = \frac{R}{T^2}$; ergo $P = \frac{R}{T^2}$. *Conſule num. 2 & 3 demonſtrationis.*

5°. $P = \frac{R}{T^2}$, & $M = P R^2$; ergo $M = \frac{R^3}{T^2}$. *Conſule num. 1 & 4 demonſtrationis.*

PROBLEMA III.

Invenire diſcrimen quod reperitur inter molem ſolis & molem Terræ.

Præparatio. 1°. Venus est planeta circà solem, & luna est planeta circa Terram circulariter girans.

2°. Distantia veneris à sole repræsentatur per numerum 723, & distantia lunæ à Terra per numerum 3, dummodò distantia Terræ à sole repræsentetur per numerum 1000.

3°. Tempus periodicum veneris est 5394, & tempus periodicum lunæ est 656 horarum.

4°. Cubus numeri 723 est 377933067, & cubus numeri 3 est 27.

5°. Quadratum numeri 5394 est 29095236, & quadratum numeri 656 est 430336.

Resolutio. Moles solis : ad molem Terræ :: 207194 : 1.

Demonstratio. 1°. *Ex problemate 2*, moles solis proportionalis est cubo distantiæ veneris à sole, per quadratum temporis periodici ejusdem veneris diviso. Habebitur ergo æquatio sequens, Moles solis $= \frac{377933067}{29095236} = 13$.

2°. *Ex eodem problemate*, Moles Terræ proportionalis est cubo distantiæ lunæ à Terra, diviso per quadratum temporis periodici ejusdem lunæ. Habebitur ergo sequens æquatio, Moles Terræ $= \frac{27}{430336} = \frac{1}{15938}$. Ergo Moles solis : ad molem Terræ :: $13 : \frac{1}{15938}$ :: 207194 : 1.

Hinc sequitur solem esse saltem quater minùs densum Terrâ hac quam incolimus. Et verò constat inter Astronomos volumen solis esse deciès centiès milliès majus volumine Terræ. Quo supposito, sic ratiocinor : si sol foret æquè densus ac Terra, quantitas materiæ solaris repræsentaretur per numerum 1000000, & quantitas materiæ terrestris per numerum 1. Si sol foret præcisè quater minùs densus quàm Terra, quantitas materiæ solaris repræsentaretur per numerum 250000, & quantitas materiæ terrestris per numerum 1. Ergo si quantitas materiæ solaris repræsentatur dumtaxat per numerum 207194, & quantitas materiæ terrestris per numerum 1, indè sequitur evidenter solem esse saltem quater minùs densum Terrâ hac quam incolimus.

ANNOTATIO

ANNOTATIO I.

Iisdem omninò Principiis facilè determinabitur discrimen quod reperitur inter molem solis & molem Saturni. Hoc unum sciendum est distantiam scilicet quarti Satelliris à centro Saturni repræsentari per numerum 12, & tempus ejus periodicum per 382 horas. Ex illis notionibus deducitur molem solis : ad molem Saturni :: 1092 : 1.

ANNOTATIO II.

Distantia quarti Satellitis Jovis à centro Planetæ sui primarii repræsentatur per numerum 13, & tempus ejus periodicum per 402 horas. Est ergo moles solis ad molem Jovis :: 949 : 1.

ANNOTATIO III.

Distantia Satellitis Veneris à centro Planetæ sui primarii repræsentatur per numerum 30, & tempus ejus periodicum per 223 horas. Est ergo moles Solis ad molem Veneris :: 23946 : 1.

ANNOTATIO IV.

Moles Solis, Saturni, Jovis, Terræ & Veneris repræsentari debent per numeros 1, $\frac{1}{1092}$, $\frac{1}{949}$, $\frac{1}{27194}$, $\frac{1}{23940}$.

Est ergo moles Saturni ad molem Terræ :: 189 : 1.

Est etiam moles Jovis ad molem Terræ :: 218 : 1.

Est denique moles Veneris ad molem Terræ :: 28 : 1.

CAPUT IV.

De motu composito per lineam rectam.

LOquimur hîc de illo motu composito quem producunt duæ Potentiæ quarum vires constantes & uniformes partim opponuntur & partim conspirant, seu qua-

rum directiones angulum quemcumque efficiunt. Talis est motus quem producunt duæ Potentiæ P & *p*, *fig. 1 tab. 1*, simul & eodem instanti agentes in corpus C juxta directiones C D & C A.

LEX UNICA.

Corpus, viribus conjunctis, diagonalem quadrilateri eodem tempore percurret, quo, separatis viribus, latera ejusdem quadrilateri percurrisset.

Explicatur. Si corpus C, spatio unius horæ, per solam Potentiam P ferretur motu uniformi ex puncto C in punctum D, & per solam potentiam *p* ex puncto C in punctum A; dico quòd corpus C, spatio unius horæ, motu compositio percurret diagonalem C B quadrilateri A B C D, dummodò eodem tempore moveatur per potentiam P juxta directionem C D, & per potentiam *p* juxta directionem C A.

Demonstratur. Directiones Potentiarum P & *p* non adæquatè opponuntur, & corpus C est essentialiter iners & passivum; ergo corpus C à duabus illis Potentiis simul agitatum, elapsâ unâ horâ, reperiri debet tum in extremitate lineæ C D, tum in extremitate lineæ C A; ergo corpus C, elapsâ unâ horâ, reperiri debet in puncto B, nam punctum B est unicum punctum utrique lineæ C D & C A commune; ergo corpus C, spatio unius horæ, percurrit diagonalem C B quadrilateri A B C D; ergo corpus quodlibet, viribus conjunctis, diagonalem quadrilateri eodem tempore percurret, quo, separatis viribus, latera ejusdem quadrilateri percurrisset.

Hinc explicabis quânam de causâ Natator flumen A B C D, *fig. 3 tab. 1*, ita trajiciens, ut, unius horæ spatio, per aquam profluentem abripiatur ex puncto C in punctum D, & per vim propriam feratur ex puncto C in punctum A, neque attingat punctum D, neque punctum A, sed perveniat ad punctum B, describendo, unius horæ spatio, lineam C B.

Hinc etiam explicabis quânam de causâ procumbat qui-

quis ſuper cymbam ſtat rectus, eo tempore quo illa violenter in littus impingitur. Et verò in littus non poteſt impingi cymba, quin ſuper ſeipſam reflectatur : non poteſt cymba ſuper ſeipſam reflecti, quin pedes hominis ſtantis, *v. g.*, Petri, motum aliquem accipiant ad regrediendum à littore. Sic igitur ratiocinor : jam unà cum cymbâ corpus Petri motum acceperat ad progrediendum versùs littus, quem motum partes ſuperiores, caput nempè & brachia retinent ; motum alterum ad regrediendum à littore, propter cymbæ reflexionem, pedes ejus accipiunt ; tum igitur debet, non ſine ſpectantium riſu, procumbere Petrus.

Solvuntur argumenta oppoſita.

Obj. 1°. Si corpus C motu compoſito percurreret diagonalem C B, *fig. 2 tab. 2*, ſequeretur quòd motus compoſitus per diagonalem C B non differret à duobus motibus disjunctis per latera C D & C A ; atqui hoc falſum eſt ; nam ſumma laterum C D & C A major eſt quàm diagonalis C B ; ergo falſum eſt quòd corpus C motu compoſito percurrat diagonalem C B.

Reſp. diſt. ſeq. Si corpus C motu compoſito percurreret diagonalem C B, ſequeretur quòd motus compoſitus per diagonalem C B non differret à duobus motibus disjunctis per latera C D & C A, hoc eſt, ſequeretur quòd motus compoſitus per diagonalem C B æqualis foret duobus motibus disjunctis per latera C D & C A, neg. ſeq. æquivalens foret duobus motibus disjunctis per latera C D & C A, conc. ſeq. & ſic diſtinctâ minore, nego cquam. Corpus C idem ſpatium percurrit, ſive vis unica F ipſum propellat per diagonalem C B, ſivè duæ vires P & *p* ipſum eodem tempore urgeant per latera C D & C A ; ergo motus compoſitus per diagonalem C B æquivalens eſt duobus motibus disjunctis per latera C D & C A.

Inſt. Effectus idem eſt, ſive producatur à duabus viribus P & *p*, ſive producatur ab unica vi compoſita F ; ergo motus compoſitus per diagonalem C B æqualis eſt duobus motibus disjunctis per latera C D & C A.

Resp. dist. ant. Effectus idem est, sive producatur à duabus viribus P & *p*, sive producatur ab unica vi composita F, quando supponitur duas vires P & *p* esse partim conspirantes & partim oppositas, conc. ant. Si supponatur duas vires P & *p* esse omninò conspirantes, neg. ant. & æquam. Si duæ vires P & *p* nullo modo opponerentur, seu forent omnino conspirantes, majorem procul omni dubio effectum producerent, quàm vis composita F; nam corpus C in hac hypothesi spatium percurreret æquale duobus lateribus CD & CA. Sed quoniam duæ vires P & *p* partim conspirant & partim opponuntur, non mirum est quòd effectus idem omninò sit, sive producatur à duabus viribus P & *p*, sive producatur ab unica vi F.

Hinc sequitur quòd, quò major est angulus efformatus à directionibus virium, eò major est earum oppositio; & quò minor est angulus efformatus à directionibus virium, eò etiam minor est earum oppositio.

Obj. 2°. Corpus C, *fig. 3 tab. 1*, viribus conjunctis, totam diagonalem CB quadrati perfecti ABCD eodem tempore percurrere non debet, quo, separatis viribus, latera ejusdem quadrilateri percurrisset; quod sic probo: corpus C debet tantùm percurrere partem illam diagonalis CB quæ æqualis est lateri CA, aut lateri CD; ergo corpus C percurrere non debet totam diagonalem CB. Prob. ant. Si duæ vires P & *p* fuissent omninò conspirantes, corpus C lineam percurrisset æqualem duobus lateribus CA & CD simul sumptis: si duæ vires P & *p* fuissent diametraliter, seu omninò oppositæ, corpus C lineam nullam percurrisset: Ergo si duæ vires P & *p* medium teneant inter perfectam oppositionem & perfectam conspirationem, corpus C debet, super diagonalem CB, spatium percurrere quod sit æquale lateri CA aut lateri CD. *subsumo.* Sed duæ vires P & *p* medium tenent inter perfectam oppositionem & perfectam conspirationem; nam illarum directiones efficiunt angulum rectum ACD; ergo &c.

Resp. ad 1. & 2. neg. ant. ad 3. conc. ant. & neg. c quam tanquàm de non supponente. In hac tota argumentatione

ſupponitur diagonales lineas eſſe in quadrilatero quocumque præcisè inter ſe in ratione inverſa angulorum ex quibus proficiſcuntur. Fateor equidem lineam diagonalem quæ proficiſcitur ex angulo 120 graduum eſſe multò minorem lineâ diagonali quæ proficiſcitur ex angulo 60 graduum. Sed nullus umquam Geometra fatebitur duas illas lineas diagonales eſſe præcisè in ratione inverſa angulorum quos ſecant in duas partes æquales, hoc eſt, nullus umquam Geometra fatebitur diagonalem F C, *fig. 2. tab. 1*, rhombi P F *p* C, quæ proficiſcitur ex angulo F 120 graduum eſſe præcisè ſubduplam lineæ diagonalis quæ proficiſceretur ex angulo *p* 60 graduum. Et verò in triangulo æquilatero F *p* C, habetur F C = F *p* = F P. Supponatur ergo diagonalem F C eſſe præcisè ſubduplam lineæ diagonalis quæ proficiſceretur ex angulo *p*, quam appello diagonalem P *p*, habebitur P *p* = 2 F C = F *p* + F P. Sed haberi non poteſt æquatio P *p* = F *p* + F P; nam latus unum in triangulo rectilineo non poteſt eſſe æquale duobus aliis lateribus ſimul ſumptis; ergo diagonalis lineæ quæ proficiſcitur ex angulo 120 graduum non eſt præcisè ſubdupla lineæ diagonalis quæ proficiſceretur ex angulo 60 graduum.

Præterea ſi corpus C agitatum à duabus viribus P & *p* percurrere debeat aliquam partem lineæ diagonalis C B, debet illam integram percurrere. Et verò ideò corpus C percurrit partem aliquam diagonalis C B ut ſcilicet reperiatur in linea communi tum lateri horizontali C D, tum lateri perpendiculari C A, *fig. 3. tab. 1*; ergo corpus C pervenire debet ad punctum B; tàm enim punctum B commune eſt lateri C D & lateri C A, quàm aliud quodcumque punctum diagonalis C B.

CAPUT V.

De Motu curvo in genere ſpectato.

1°. LInea curva conſideratur à Phyſicis & à Geometris tanquàm polygonum conſtans lateribus exiguis numero indeterminatis, quæ angulos efformant.

2°. Angulus efformatus à duobus lateribus lineæ cujuſcumque curvæ vix diſtat à duobus angulis rectis. Quod dicitur de uno angulo, hoc & dicatur de omnibus angulis qui reperiuntur in lineâ quâcumque curvâ.

3°. Duæ lineæ CI & IK, *fig. 61. tab. 4*, eſſent duo latera ad lineam curvam pertinentia, ſi eſſent infinitè parva, & ſi angulus CIK vix diſtaret à 180 gradibus.

4°. In quâcumque lineâ curvâ tangens linea nihil eſt aliud quàm productio alicujus ex lateribus exiguis quæ curvitatem hanc conſtituunt. Quoniam autem in omni lineâ curvâ reperiuntur exigua latera non tot quin plura, quorum unumquodque produci poteſt, indè ſequitur evidenter indefinitum eſſe numerum linearum quæ curvam aliquam lineam tangere poſſunt.

5°. Vis projectionis ſeu vis projectilis eſt vis quæ ſuam habet directionem per lineam angulum efformantem cum linea directionis vis centripetæ de qua agebamus in capite 3 tractatûs hujus. Lapis C horizontaliter projectus, *v. g.*, agitatur per vim projectionis quæ ſuam habet directionem per lineam CD horizonti parallelam, *fig. 61. tab. 4*, & per vim centripetam quæ dirigitur per lineam CA huic eidem horizonti perpendicularem. Eam ob rem lapis projectus, urgente gravitate ſua, deflectitur de curſu rectilineo, & curvam lineam CIKB in aere deſcribendo, tándem cadit in terram in puncto B.

6°. Corpus omne lineam curvam deſcribet, quotieſcumque ſollicitabitur eodem tempore per vim projectionis conſtantem & uniformem, & per vim acceleratricem ver-

sùs centrum aliquod tendentem, seu per vim quamcumque centripetam. Et verò sit corpus Q, *fig. 62. tab. 4.* primo instanti sollicitatum per vim projectionis juxta lineam QF, & per vim centripetam juxta radium QGS, corpus Q diagonalem Q*p* describet. Item corpus Q solliciteur instanti secundo per vim projectionis juxta lineam *p*E, & per vim acceleratricem juxta radium *p*HS, corpus Q describet diagonalem *p*O efformantem cum diagonali Q*p* angulum obtusum Q*p*O vix à duobus angulis rectis distantem; & sic de cæteris instantibus. Sed omnes illæ lineæ diagonales lineam curvam efformant, ut considerati patebit; ergo corpus omne lineam curvam describet, quotiescumque eodem tempore sollicitabitur per vim projectionis constantem & uniformem, & per vim acceleratricem versùs centrum aliquod continuò tendentem. Quandonam & quonam mechanismo linea hæc curva sit circularis aut elliptica, id fusè admodum determinabimus in capitibus 7 & 8.

Hinc sequitur 1°. quòd si navis aliqua motu uniformi & celerrimo feratur super aquas, & globus tormentarius ex malo navis hujus decidat, sequitur, inquam, quòd globus ille lineam curvam in aere describet. Et verò donatur hîc globus motu horizontali sensibiliter uniformi, & motu perpendiculari realiter accelerato, nempè motu gravitatis; ergo lineam curvam in aere describere debet.

Sequitur 2°. Quòd globulus plumbeus ex fistula emissus, lineam curvam in aere describat. Is enim motum quemdam horizontalem accipit à pulvere pyrio accenso, & motum perpendicularem realiter acceleratum habet à propria gravitate.

Sequitur 3°. quod si eques, prosusis habenis equitans, malum auratum projiciat sursùm per lineam perpendicularem, sequitur, inquam, quòd hic eques, à cursu suo non abstinens, malum suum auratum quâ projecit manu, eâdem accipiat in descensu. Et verò malum auratum habet 1°. determinationem ad lineam horizontalem sibi cum equite communem, quam determinationem tum in ascensu,

tum in descensu conservat. 2°. Idem malum auratum in ascensu habet à projiciente determinationem ad motum perpendicularem retardatum, & in descensu habet à gravitate sua determinationem ad motum perpendicularem acceleratum; ergo malum auratum, tum in ascensu, tum in descensu, lineam curvam describere debet; ergo si eques, &c.

Attamen experientia non succedet 1°. si motus horizontalis non fit sensibiliter uniformis; 2°. si ventus aliquis regnet; 3°. si eques non sit mira dexteritate donatus, &c.

CAPUT VI.

De Motu centrifugo.

MOtus centrifugus, seu vis centrifuga est vis per quam corpus quod movetur in linea quacumque curva, continuò nititur recedere à centro sui motûs per lineam tangentem. Sit igitur.

ASSERTIO UNICA.

In omni corpore lineam quamcumque curvam percurrente datur aliqua vis centrifuga.

Demonstratur. Corpus omne lineam quamcumque curvam percurrens, continuò nititur recedere à centro sui motûs per lineam tangentem; ergo in omni corpore lineam quamcumque curvam percurrente datur aliqua vis centrifuga. Prob. ant. Si corpus, lineam quamcumque curvam percurrens, sibimetipsi relinqueretur, per lineam tangentem à centro recederet; si corpus Q, *v. g.*, *fig. 62. tab. 4*, percurrens lineam curvam Q*p*O sibimetipsi relinqueretur in puncto *p*, per lineam tangentem *p*E recederet à centro S, ergo &c. Prob. ant. Corpus, dum movetur, lineam rectam, quantùm in ipso est, describit, *ex prima lege generali motûs*; sola autem linea recta quam corpus Q, in linea curva Q*p*O girans, describere possit,

est linea tangens ; ergo &c. Prob. partem alteram antecedentis. Sola linea recta quam corpus Q, existens in puncto *p*, describere possit, est linea *p*E ; sed linea *p*E est linea tangens curvam Q*p*O in puncto *p* ; nam linea tangens nihil est aliud quàm latus quodcumque lineæ curvæ productum, ut vidimus in capite præcedenti ; ergo si corpus Q, percurrens lineam curvam Q*p*O, sibimetipsi relinqueretur in puncto *p*, per lineam tangentem *p*E, recederet à centro S.

Quod autem dicitur de puncto *p*, hoc &. dicatur de alio quocumque puncto lineæ curvæ Q*p*O ; ergo corpus omne lineam quamcumque curvam percurrens, continuò nititur recedere à centro sui motûs, per lineam tangentem ; & consequenter in omni corpore lineam curvam describente datur aliqua vis centrifuga.

Hinc non mirum est 1°. quòd si lapis elabi possit ex aliqua funda circulariter agitata, hic lapis per tangentem effugiat.

Non mirum est 2°. quòd, si in eadem funda agitetur vas aliquod aquâ plenum, aqua per gravitatem suam non decidat, eo tempore quo vas reperitur in parte superiore circuli descripti. Aqua enim in illo vase contenta continuò conatur per lineam tangentem à centro sui motûs recedere.

Corollarium 1. Vis centrifuga distinguitur à vi projectionis. Hæc enim semper est uniformis, illa verò variabilis est, ut videbimus inferiùs.

Corollarium 2. Vis centrifuga nihil est aliud quàm effectus immediatus & necessarius vis inertiæ corporis eodem tempore donati vi quacumque projectionis constanti & uniformi, & vi quacumque centripeta in ratione inversa quadratorum distantiarum à centro.

Corollarium 3. Vis centrifuga non distinguitur à vi tangentiali. Quænam sint ipsius proprietates, id fusè admodùm exponetur in capitibus 7 & 8.

CAPUT VII.

De Motu circulari.

CIrculus rectè definitur à Geometris figura plana, unius lineæ circuitu comprehensa, quæ circumferentia dicitur, à qua omnes lineæ, ad centrum ductæ, sunt æquales. Radius circuli est linea quæcumque recta ex centro ad circumferentiam ducta. Diameter ejus est linea quæcumque per centrum ducta & in circuli circumferentia utrinque terminata. Linea circulum tangens est linea quæ circulo occurrens, illum tamen, ulteriùs producta, non secat. In circulo C, *fig. 11. tab. 7*, punctum C est centrum, linea AFBD circumferentia, linea CD radius, linea AB diameter, & linea DE tangens. Ità loquuntur Geometræ.

Physici verò tres omninò vires distinguunt in omni corpore circulum describente, nempè vim projectionis, vim centripetam & vim centrifugam. Vis projectionis suam habet directionem per lineam tangentem, illaque essentialiter constans est & uniformis. Vis centripeta, ex natura sua variabilis, suam habet directionem per radium, atque continuò trudendo corpus mobile versùs centrum circuli, impedit ne corpus illud per tangentem effugiat. Denique vis centrifuga est illa vis per quam corpus, circulariter girans, continuò nititur recedere à centro sui motûs. De tribus illis viribus agemus in hoc septimo capite. Nos enim non latet modum describendi circulum, seu circulum describendum, esse potiùs objectum partiale Mecanices, quàm circulum jam descriptum. Eam ob rem sedulò determinabimus quænam sit qualitas & quantitas virium adhibendarum ut circulus physicè describatur à corpore mobili.

ASSERTIO I.

Vis centripeta corporis cujuscumque circulum describentis

æqualis eſt quadrato velocitatis corporis circulariter girantis, diviſo per diametrum circuli deſcripti.

Explicatur. Sit corpus B, *fig. 12. tab. 7*, deſcribens circulum O cujus diameter ſupponitur eſſe 5 pedum. Donetur corpus B, inſtanti quolibet ſui motûs, 10 gradibus velocitatis. Dico quòd vis centripeta corporis hujus, in quolibet puncto circuli ſui, æqualis erit quadrato numeri 10 diviſo per numerum 5, hoc eſt repræſentabitur per $\frac{100}{5} = 20$.

Si quis velit propoſitionem hanc algebricè enuntiare, is appellabit P vim centripetam corporis cujuſcumque circulum deſcribentis; V V quadratum quodcumque velocitatis; D ſeu 2 R diametrum quamcumque; & habebitur formula ſequens, $P = \frac{VV}{2R}$. Ut autem demonſtretur fundamentalis hæc propoſitio, non pauca mihi videntur eſſe neceſſariò præmittenda.

1°. Arcus B H circuli O ſupponitur eſſe infinitè parvus, & conſequenter ſpectatur tanquam linea recta. Hic arcus repræſentat ſpatium percurſum à corpore B intrà tempus infinitè parvum, & ideò velocitatem corporis hujus deſignat.

2°. Angulus C trianguli B H C eſt infinitè parvus; habet enim pro menſura mediam dumtaxat partem arcûs infinitè parvi B H. In praxi negligi poteſt hic angulus.

3°. Corpus B, deſcribens arcum B H, donatur duabus viribus, quarum altera projectionis repræſentatur per lineam B G, & altera centripeta per lineam B F.

4°. Angulus B trianguli B H C eſt rectus; eſt enim diameter quælibet circulo ſuo perpendicularis. Uni igitur angulo recto æquivalent ejuſdem trianguli duo anguli H & C.

5°. Angulus H trianguli B H C eſt ſenſibiliter rectus; eſt enim infinitè parva quantitas quâ differt ab angulo recto. *num.* 2.

6°. Linea H F perpendicularis eſt diametro B C; eſt enim hæc linea ſinus rectus arcûs B H.

7°. Duo triangula BHC & BFH ſunt æquiangula. Nam angulus F trianguli BFH, & angulus H trianguli BHC ſunt recti; inſuper angulus B communis eſt duobus illis triangulis; ergo hæc duo triangula habent latera ſua proportionalia. His præmiſſis.

Demonſtratur. 1°. Duo triangula BHC & BFH ſunt æquiangula, *num.* 7; ergo BC : BH :: BH : BF; ergo $BC \times BF = BH^2$; ergo $BF = \frac{BH^2}{BC}$.

2°. BF repræſentat vim centripetam corporis B percurrentis arcum BH, *num.* 3. Item BH repræſentat velocitatem, & BH^2 quadratum velocitatis ejuſdem corporis, *num.* 1. Denique BC repræſentat diametrum circuli O; ergo vis centripeta corporis B deſcribentis circulum O æqualis eſt quadrato velocitatis hujus corporis diviſo per diametrum circuli deſcripti; ergo vera eſt æquatio $P = \frac{VV}{2R}$.

Corollarium 1. Vis centripeta P corporis $A = \frac{VV}{2R}$, & vis centripeta *p* corporis $a = \frac{uu}{2r}$; ergo $P : p :: \frac{VV}{2R} : \frac{uu}{2r}$; ergo $\frac{pV.V}{2R} = \frac{Puu}{2r}$; ergo $\frac{pVV}{R} = \frac{Puu}{r}$; ergo $P : p :: \frac{VV}{R} : \frac{uu}{r}$; ergo vires centripetæ duorum corporum circà varia centra girantium, ſunt inter ſe ſicut quadrata velocitatum diviſa per radios circulorum quos illa corpora deſcribunt.

Corollarium 2. Si luna gravitati ſuæ relinqueretur, ipſa percurreret 15 dumtaxat pedes intrà primum minutum temporis.

Demonſtratur. 1°. Luna, quolibet minuto temporis, percurrit in circulo ſuo 187900 pedes.

2°. Quadratum numeri 187900, & conſequenter quadratum velocitatis lunæ, minuto quolibet temporis, repræſentatur per numerum 35, 306, 410, 000.

3°. Diameter circuli quem luna periodicè deſcribit eſt 2, 464, 992, 000 pedes.

4°. Vis centripeta lunæ, quolibet minuto temporis, cognoscitur dividendo quadratum velocitatis ejus, nempè 35,306,410,000 per diametrum orbitæ lunaris, nempè per numerum 2,464,992,000, *per primam assertionem.* Divisionis hujus quotiens est numerus 15. Ergo vis centripeta lunæ, quolibet minuto temporis, designatur per numerum 15, seu, quod idem est, luna, gravitati suæ derelicta, percurreret 15 dumtaxat pedes intrà primum minutum temporis.

ASSERTIO II.

In corpore circulum describente velocitas circulationis æqualis est velocitati quam acquisivisset idem corpus liberè decidens, atque motu uniformiter accelerato percurrens mediam partem radii circuli descripti.

Explicatur. Sit corpus B, *fig. 12. tab. 7*, describens circulum O cujus radius BO sit 10 pedum; dico quòd illius velocitas circulationis eadem omninò est, ac velocitas quam acquisivisset idem corpus liberè cadens, atque motu uniformiter accelerato percurrens spatium 5 pedum. Ut autem clarior fiat demonstratio nostra, hæc sunt necessariò præmittenda.

1°. Sit P vis centripeta corporis B, V velocitas ipsius, VV quadratum ejusdem velocitatis, R radius circuli O, $\frac{R}{2}$ media pars hujus radii quam corpus B supponitur percurrisse motu uniformiter accelerato, T tempus quod adhibitum fuit ut percurratur media pars radii circuli O, T^2 quadratum hujus temporis.

2°. Spatium percursum à corpore gravi liberè decidente eò majus est, quò major est corporis gravitas.

3°. Spatium percursum à corpore gravi liberè decidente proportionale est quadrato temporis adhibiti ad spatium hoc percurrendum, *ex corollario 2 propositionis articuli 2 cap. 3.*

4°. Spatium quod motu accelerato corpus B percurrere supponitur, repræsentatur per $\frac{R}{2}$; ergo vera est hæc æquatio

$\frac{R}{2} = P\,T\,T$, hoc est, spatium percursum à corpore gravi liberè decidente proportionale est quadrato temporis multiplicato per vim centripetam.

5°. Corpus B, dato tempore, percurrens motu quodam accelerato $\frac{R}{2}$, velocitatem acquisivit quâ aptum redditur ad percurrendum eodem tempore motu uniformi totum radium circuli O, nempè R, *ex coroll. 1. prop. art. 2. cap. 3.*

6°. Velocitas æqualis est spatio percurso, diviso per tempus adhibitum ad spatium hoc percurrendum; ergo habetur hæc æquatio $V = \frac{R}{T}$. His præmissis.

Demonstratur. 1°. $\frac{R}{2} = P\,T\,T$, *num. 4*; ergo $R = 2\,P\,T\,T$.

2°. $V = \frac{R}{T}$, *num. 6*; sed $R = 2\,P\,T\,T$; ergo $V = \frac{2\,P\,T\,T}{T} = 2\,P\,T$.

3°. $V = 2\,P\,T$; ergo $T = \frac{V}{2\,P}$; ergo $T^2 = \frac{V\,V}{4\,P\,P}$.

4°. $\frac{R}{2} = P\,T\,T$; sed $T\,T = \frac{V\,V}{4\,P\,P}$; ergo $\frac{R}{2} = \frac{P\,V\,V}{4\,P\,P} = \frac{V\,V}{4\,P}$.

5°. $\frac{R}{2} = \frac{V\,V}{4\,P}$; ergo $R = \frac{V\,V}{2\,P}$; ergo $2\,P\,R = V\,V$; ergo $V = \sqrt{2\,P\,R}$.

Ex illis æquationibus sequitur evidenter velocitatem quam acquisivit corpus B liberè cadens, atque motu uniformiter accelerato percurrens mediam partem radii circuli O, sequitur, inquam, hanc velocitatem exprimi per æquationem $V = \sqrt{2\,P\,R}$. Sed velocitas circulationis ejusdem corporis exprimitur per eamdem æquationem. Et verò $P = \frac{V\,V}{2\,R}$, *ex assertione 1 capitis hujus*; ergo $2\,P\,R = V\,V$ ergo $\sqrt{2\,P\,R} = V$; ergo velocitas circulationis corpori

cujuſcumque repræſentatur per æquationem $V = \sqrt{2PR}$. Sed velocitas quam acquiſiviſſet corpus quodcumque liberè cadens, atque motu uniformiter accelerato percurrens mediam partem radii circuli deſcripti, repræſentaretur per æquationem $V = \sqrt{2PR}$; ergo in corpore circulum deſcribente velocitas circulationis æqualis eſt velocitati quam acquiſiviſſet idem corpus liberè decidens, atque motu uniformiter accelerato percurrens mediam partem radii circuli deſcripti.

Corollarium 1. In corpore circulum deſcribente velocitas projectionis eſt ſenſibiliter æqualis velocitati circulationis.

Explicatur. Sit corpus B, *fig. 22. tab. 7*, deſcribens circulum O; dico quòd velocitas illius projectionis, repræſentata inſtanti primo per lineam BG, ſit ſenſibiliter æqualis velocitati circulationis repræſentatæ eodem inſtanti per arcum BH.

Demonſtratur 1°. Corpus B, donatum ſolâ vi projectionis, percurreret lineam BG eodem inſtanti quo percurrit arcum BH per duas vires quarum altera projectionis eſt, altera verò centripeta, *ex cap. 4 & 5.*

2°. Linea BG, infinitè parva, eſt ſenſibiliter æqualis arcui BH infinitè parvo; ergo velocitas projectionis corporis B eſt ſenſibiliter æqualis velocitati ejus circulationis; ergo in corpore circulum deſcribente velocitas projectionis eſt ſenſibiliter æqualis velocitati circulationis.

Corollarium 2. In corpore circulum deſcribente velocitas projectionis eſt ſenſibiliter æqualis velocitati quam acquiſiviſſet idem corpus liberè cadens, atque motu uniformiter accelerato percurrens mediam partem radii circuli deſcripti.

Demonſtratur. In corpore circulum deſcribente velocitas projectionis eſt ſenſibiliter æqualis velocitati circulationis, *ex corollario ſuperiori.* Sed velocitas circulationis æqualis eſt velocitati quam acquiſiviſſet idem corpus liberè cadens, atque motu uniformiter accelerato percurrens mediam partem radii circuli deſcripti, *ex aſſertione 2.* Ergo in corpore circulum deſcribente velocitas projectionis eſt ſenſibiliter æqualis velocitati quam acquiſiviſſet idem corpus

liberè cadens, atque motu uniformiter accelerato percurrens mediam partem radii circuli descripti.

ASSERTIO III.

In corpore circulum describente directio vis projectionis & directio vis centripetæ semper efformant angulum rectum.

Demonstratur. Linea tangens & radius semper in circulo angulum rectum efformant; sed in corpore circulum describente directio vis projectionis est linea tangens, & directio vis centripetæ est radius; ergo in corpore circulum describente directio vis projectionis & directio vis centripetæ semper efformant angulum rectum.

ASSERTIO IV.

In corpore circulum describente vis centripeta semper est æqualis vi centrifugæ.

Demonstratur. Corpus circulariter girans distat æqualiter à centro sui motûs in omnibus punctis circumferentiæ quam describit; ergo in corpore circulum describente vis centripeta est æqualis vi centrifugæ. Prob. quam. Si in corpore circulariter girante vis centripeta non semper æqualis remaneret vi centrifugæ, corpus illud nunc magis, nunc minus distaret à centro; ergo si &c. Prob. ant. Vi centripetâ prævalente supra vim centrifugam, corpus circulariter girans accederet ad centrum circuli; contrà verò vi centrifugâ prævalente supra vim centripetam, corpus circulariter girans recederet à centro circuli; ergo si in corpore circulariter girante vis centripeta non semper æqualis remaneret illius vi centrifugæ, corpus illud nunc magis, nunc minùs distaret à centro sui circuli.

Dices 1°. Vis centrifuga corporis circulariter girantis est vis uniformis, & vis illius centripeta, à gravitate prorsùs indistincta, non est vis uniformis, nam sequitur rationem inversam quadratorum distantiarum à centro virium; ergo duæ illæ vires in corpore circulariter girante non sunt semper æquales.

Resp.

Resp. dist. secundam partem antecedentis. Vis centripeta corporis circulariter girantis non est vis uniformis, quando mutatur corporis gravis distantia à centro, conc. ant. quando distantia hæc semper eadem remanet, neg. ant. & æquam.

Dices 2°. Turbines qui moventur motu rotationis, nullâ donantur vi centrifugâ, & tamen donantur aliquâ vi centripetâ; ergo in omnibus corporibus quæ moventur circulariter, vis centrifuga non est æqualis vi centripetæ. Prob. ant. quoad primam partem: sæpe turbines, eo tempore quo moventur circulariter, in illo præcisè terræ puncto remanent, in quo primùm collocati fuerant; quod profectò non accideret, si donarentur turbines aliquâ vi centrifugâ; ergo &c.

Resp. ad 1. neg. ant. quoad primam partem. Ad 2. neg. ant. tanquam de non supponente. Supponitur in hac argumentatione quòd turbines, quos pueri torquere solent, pro centro rotationis habeant ipsum illud terræ punctum in quo primùm collocati fuerunt. Hoc autem apertè falsum est. In ipso axi suum habent centrum rotationis hujusmodi sphærica corpora. Axis hic non donatur motu circulationis. Toties igitur debent turbines in illo præcisè terræ puncto remanere in quo primùm collocati fuerant, quoties vires centrifugæ variarum partium ex quibus componuntur, sunt inter se in æquilibrio perfecto.

Dices 3°. Quomodo ventus potest esse causa cur vela Molerinæ (moulin à vent) moveantur motu circulari?

Resp. Axi molerinæ perpendicularia non sunt velâ, sed cum illo angulum 54 aut 55 graduum efficiunt. Axi molerinæ non possunt sic inclinari vela, quin à vento percussionem obliquam accipiant. Percussionem obliquam à vento non possunt accipere, quin lineam aliquam diagonalem, instanti quolibet, vela molerinæ percurrant; quæ lineæ diagonales, instanti quolibet repetitæ, lineam circularem efformant.

ASSERTIO V.

Duo corpora æqualia quæ moventur in circulis æqualibus cum inæquali velocitate, ſuas habent vires centrifugas in ratione directa quadratorum velocitatum.

Explicatur. Sint duo corpora A & B perfectè æqualia. Moveantur hæc duo corpora in circulis perfectè æqualibus, alterum cum 1 gradu, alterum cum 2 gradibus velocitatis. Dico quòd vis centrifuga corporis A : ad vim centrifugam corporis B :: 1 : 4. Ut autem demonſtretur hæc aſſertio.

Præmitto 1°. Sit u velocitas corporis A, u^2 quadratum hujus velocitatis, f vis centrifuga ejuſdem corporis. Sit etiam V velocitas, V^2 quadratum velocitatis, F vis centrifuga corporis B. Sit denique D diameter utriuſque circuli à corporibus A & B deſcripti.

Præmitto 2°. In quolibet corpore circulum deſcribente vis centrifuga æqualis eſt vi centripetæ, *ex aſſertione 4.* Sed vis centripeta corporis circulum deſcribentis æqualis eſt quadrato velocitatis hujus corporis diviſo per diametrum circuli deſcripti, *ex aſſertione 1*; ergo vis centrifuga corporis circulum deſcribentis æqualis eſt eidem quadrato diviſo per eamdem diametrum; ergo $f = \frac{uu}{D}$, & $F = \frac{VV}{D}$. His præmiſſis.

Demonſtratur. $f = \frac{uu}{D}$ & $F = \frac{VV}{D}$; ergo $f : F :: \frac{uu}{D} : \frac{VV}{D} :: uu : VV$; ergo vis centrifuga corporis A : ad vim centrifugam corporis B : : quadratum velocitatis corporis A : ad quadratum velocitatis corporis B.

Corollarium. Si corpus A & corpus B ſunt molis inæqualis, appellabitur m moles corporis A, & M moles corporis B. Habebitur ergo $f = \frac{muu}{D}$, & $F = \frac{MVV}{D}$; numquam enim licet, ubi de viribus duorum corporum

agitur, à mole præcindere, nisi moles illorum sint æquales inter se. Data fuisset igitur proportio sequens, $f : F :: \frac{muu}{D} : \frac{MVV}{D} :: muu : MVV$. Ergo vires centrifugæ duorum corporum inæqualium quæ moventur in circulis æqualibus cum inæquali velocitate sunt in ratione compositâ molium & quadratorum velocitatum.

ASSERTIO VI.

Duo corpora æqualia quæ moventur in circulis inæqualibus cum æquali velocitate suas habent vires centrifugas in ratione inversa radiorum circulorum quos illa corpora describunt.

Explicatur. Sint molis æqualis corpus A & corpus B. Moveatur corpus A in circulo cujus radius sit 1 pedis, & corpus B in circulo cujus radius sit 2 pedum. Dico quòd vis centrifuga corporis A : ad vim centrifugam corporis B :: radius circuli quem describit corpus B, nempè 2 : ad radium circuli quem describit corpus A, nempè 1. Vocetur V velocitas corporum A & B, V^2 quadratum hujus velocitatis, d diameter, r radius circuli à corpore A descripti, D diameter, R radius circuli à corpore B descripti, f vis centrifuga corporis A, F vis centrifuga corporis B.

Demonstratur. 1°. $f = \frac{VV}{d}$, & $F = \frac{VV}{D}$, *ex assertionibus* 1 & 5; ergo $f : F :: \frac{VV}{d} : \frac{VV}{D}$.

2°. Si $f : F :: \frac{VV}{d} : \frac{VV}{D}$; ergo $\frac{FVV}{d} = \frac{fVV}{D}$; ergo $\frac{F}{d} = \frac{f}{D}$; ergo $FD = fd$; ergo $f : F :: D : d :: R : r$; ergo vis centrifuga corporis A : ad vim centrifugam corporis B :: radius circuli descripti à corpore B : ad radium circuli descripti à corpore A; ergo duo corpora æqualia quæ moventur in circulis inæqualibus cum æquali velocitate suas habent vires centrifugas in ratione inversa

radiorum circulorum quos illa corpora describunt.

At inquies. Quânam de causâ in solutione superiori, ex eo quòd $f : F :: D : d$, indè concluditur $f : F :: R : r$?

Respondeo. Diametri duorum circulorum sunt inter se sicut radii circulorum eorumdem; ergo $D : d :: R : r$. Sed $f : F :: D : d$, *ex demonstratione superiori*; ergo $f : F :: R : r$.

Eamdem propter causam si vis centrifuga corporis A comparetur cum vi centrifuga corporis B, eligi poterit alterutra ex duabus istis proportionibus.

$$f : F :: \frac{V V}{d} : \frac{V V}{D}.$$
$$f : F :: \frac{V V}{r} : \frac{V V}{R}.$$

Ergo vires centrifugæ duorum corporum æqualium, circulariter girantium, sunt inter se sicut quadrata velocitatum divisa, aut per diametros respectivas, aut per radios respectivos circulorum descriptorum.

Corollarium. Sit m moles corporis A, M moles corporis B, & cætera omnia remaneant ut in assertione superiori; habebitur $f = \frac{m V V}{r}$, & $F = \frac{M V V}{R}$; ergo $f : F :: \frac{m V V}{r} : \frac{M V V}{R} :: \frac{m}{r} : \frac{M}{R}$; ergo $\frac{F m}{r} = \frac{f M}{R}$; ergo $F R m = f r M$; ergo $f : F :: R m : r M$; ergo vis centrifuga corporis A : ad vim centrifugam corporis B :: radius circuli descripti à corpore B multiplicatus per molem corporis A : ad radium circuli descripti à corpore A, multiplicatum per molem corporis B.

ASSERTIO VII.

Duo corpora æqualia quæ moventur in circulis concentricis, & consequenter inæqualibus, suam habent velocitatem in ratione inversa radicum quadratarum radiorum quos illa corpora describunt.

Explicatur. Sint molis æqualis corpus A & corpus B,

Moveantur hæc duo corpora in duobus circulis concentricis, quorum minor, is nempe in quo movetur corpus A, radium 4 pedum habeat, & major, is scilicet in quo girat corpus B, radium habeat 16 pedum. Dico quòd velocitas corporis A : ad velocitatem corporis B :: $\sqrt{16} : \sqrt{4} :: 4 : 2$. Vocetur u velocitas, p vis centripeta, & r radius circuli descripti à corpore A, seu distantia corporis hujus à centro suo. Vocetur etiam V velocitas, P vis centripeta, & R radius circuli descripti à corpore B, seu distantia corporis hujus à centro suo. Dico quòd habebitur $u : V :: \sqrt{R} : \sqrt{r}$.

Demonstratur. 1°. Vis centripeta p corporis A $= \frac{uu}{d} = \frac{uu}{r}$; item vis centripeta P corporis B $= \frac{VV}{D} = \frac{VV}{R}$, ex assertionibus 1, 5 & 6.

2°. Vires centripetæ, seu gravitates corporum A & B sunt in ratione inversâ quadratorum distantiarum à centro, *ex secunda lege attractionis*; ergo $\frac{uu}{r} : \frac{VV}{R} :: R^2 : r^2$; nam in casu præsenti distantiæ repræsentantur per radios circulorum; ergo $\frac{VVRR}{R} = \frac{uurr}{r}$; ergo $VVR = uur$; ergo $uu : VV :: R : r$; ergo $u : V :: \sqrt{R} : \sqrt{r}$; ergo velocitas corporis A : ad velocitatem corporis B :: radix quadrata radii circuli in quo movetur corpus B, nempè 4 : ad radicem quadratam radii circuli in quo movetur corpus A, nempè 2; ergo duo corpora æqualia quæ moventur in circulis concentricis, suas habent velocitates in ratione inversa radicum quadratarum radiorum circulorum quos hæc corpora describunt.

CAPUT VIII.

De Motu elliptico.

1°. ELlipsis A*m* H M, *fig. 14. tab. 7*, suum habet centrum in puncto p; suos focos in punctis F, f; suum axim majorem in linea A H; suum axim minorem in linea M *m*.

2°. Duæ lineæ FM, *f*M, ductæ à focis F, *f* ad idem punctum M circumferentiæ A*m*HM, ſunt duæ lineæ quæ, ſimul ſumptæ, æquales ſunt axi majori AH; ideòque Ellipſis rectè definitur à Geometris figura cujus ſingula circumferentiæ puncta ſic diſtant à focis, ut ambæ diſtantiæ FM, *f*M, ſimul ſumptæ, ſemper & neceſſariò æquales ſint toti axi majori AH.

3°. AX erit parameter majoris axis AH, dummodò illi perpendicularis ſit, atque inſtitui poſſit proportio ſequens, major axis AH : ad minorem axim M*m* :: minor axis M*m* : ad parametrum AX; ergo parameter majoris axis ellipſis cujuſcumque eſt linea perpendicularis eidem axi, æqualis quadrato minoris axis diviſo per majorem axim.

4°. Linea DC eſt linea ordinata majori axi AH; lineæ verò AD & DH ſunt lineæ abſciſſæ ex eodem axi majori.

5°. Linea F*p* eſt linea deſignans excentricitatem ellipſis A*m*HM, ſeu linea deſignans diſtantiam centri figuræ *p* à centro virium F.

6°. Planeta A deſcribens circumferentiam ellipticam A*m*HM eſt in aphelio ſuo, ſeu in maxima ſua diſtantia à ſole poſito in puncto F, cùm reperitur in puncto A: hic idem planeta poſitus in puncto H eſt in perihelio ſuo; tunc enim eſt in minima ſua à ſole diſtantia.

7°. Lineæ AF, CF, HF, FI ſunt totidem radii vectores Planetæ A, & conſequenter ſunt totidem lineæ directionis vis centripetæ ejuſdem planetæ. Lineæ AX, C*c*, H*h*, I*i* ſunt totidem lineæ directionis vis tangentialis; quæ lineæ efformant cum radiis vectoribus angulum nunc rectum, nunc acutum, nunc obtuſum, ut videbimus inferiùs.

Hinc ſequitur in ellipſi, ſicut & in circulo, tres eſſe vires accuratè diſtinguendas, ſcilicet vim projectionis, vim centripetam & vim centrifugam. De tribus iſtis viribus agemus in hoc capite totidem diſtinctis propoſitionibus, poſtquam lemmata duo præmiſerimus.

LEMMA I.

Linea curva non circularis deſcribi poteſt per varios motus, quorum unus ſit paracentricus, alii verò circulares.

Explicatur. Motus paracentricus eſt motus qui fit juxtà radium vectorem, ſive corpus quod donatur tali motu, accedat ad centrum, ſive recedat à centro virium. Sit res in exemplo. Manu teneo virgam ferream AC, *fig. 13. tab. 7.* Ità apto virgæ huic ferreæ annulum A, ut continuò impulſus à gravitate ſua, inſtanti quolibet accedat ad punctum C. Jam verò ſuppono quòd virgæ AC motum circularem imprimam; dico quòd annulus A lineam curvam non circularem deſcribet per varios motus quorum unus erit paracentricus, & alii circulares.

Demonſtratur. Annulus A inſtanti primo donatus motu circulari per lineam AE, & motu paracentrico per lineam EB, deſcribit arcum non circularem AB.

Item annulus A inſtanti ſecundo donatus motu circulari per lineam BF, & motu paracentrico per lineam FD deſcribit arcum non circularem BD; ergo linea curva non circularis ABD deſcripta fuit per varios motus, quorum unus fuit paracentricus, alii verò circulares; ergo in genere linea curva non circularis deſcribi poteſt per varios motus quorum unus ſit paracentricus & alii circulares.

LEMMA II.

Velocitates circulares AE, BF ſunt in ratione inverſa radiorum vectorum lineæ curvæ ABD.

Explicatur. Velocitas circularis AE : ad velocitatem circularem BF : : radius vector CD : ad radium vectorem CB. Quod ut demonſtretur.

Præmitto 1°. Linea CB eſt baſis trianguli ABC, & linea CD baſis trianguli BDC.

2°. Arcus circulares AE, BF deſcripti temporibus infinitè parvis, ſunt infinitè parvi, ac proindè ſpectari poſſunt tanquam lineæ rectæ.

3°. Arcus infinitè parvus AE ſpectatus tanquam linea recta, erit perpendicularis baſi CB productæ in punctum E, ac proindè repræſentabit altitudinem trianguli ABC. Eamdem propter cauſam arcus infinitè parvus BF repræſentabit altitudinem trianguli BDC. His præmiſſis.

Demonſtratur. 1°. *Ex prima lege Kepleri*, Annulus A, percurrendo lineam curvam ABD, deſcribit areas temporibus proportionales; ergo area trianguli ABC æqualis eſt areæ trianguli BDC; temporibus enim æqualibus percurruntur arcus AB & arcus BD.

2°. Areæ triangulorum ABC & BDC æquales eſſe non poſſunt, quin hæc duo triangula baſes ſuas habeant in ratione inverſa ſuarum altitudinum. Habetur ergo proportio ſequens; linea AE repræſentans altitudinem trianguli ABC: ad lineam BF repræſentantem altitudinem trianguli BDC:: baſis CD trianguli BDC: ad baſim CB trianguli ABC.

3°. Lineæ AE & BF ſunt velocitates circulares de quibus agitur; baſes CD & CB ſunt duo radii vectores lineæ curvæ ABD; ergo velocitates circulares AE, BF ſunt in ratione inverſa radiorum vectorum lineæ curvæ ABD.

Corollarium. Jure igitur concipere poſſumus lineam quamcumque ellipticam tanquam deſcriptam per varios motus, quorum unus ſit paracentricus, alii verò circulares in ratione inverſa radiorum vectorum.

PROPOSITIO I.

Corpus quodcumque deſcribens ellipſim, donatur minori vi projectionis, quàm ſi deſcripſiſſet circulum cujus radius æqualis fuiſſet diſtantiæ aphelii ellipſis ejuſdem à foco.

Explicatur. Sit corpus A, *fig. 15. tab. 7*, deſcribens ellipſim ABCD per duas vires, quarum altera projectionis dirigatur juxtà lineam AH, & altera centripeta tendat in focum F; dico quòd corpus A donatur minori vi projectionis, quàm ſi deſcripſiſſet circulum AMRN, cujus radius fuiſſet AF, nempe diſtantia aphelii A ex

foco F, in quo conſtitutum ſupponitur centrum virium.

Demonſtratur. Ellipſis ABCD eſt magis curva, quàm circulus AMRN, cujus radius eſt linea AF, nempe diſtantia aphelii A ex foco F; ergo ellipſis ABCD continet minorem vim projectionis, quàm circulus AMRN; ergo corpus quodcumque deſcribens ellipſim donatur minori vi projectionis, quàm ſi deſcripſiſſet circulum cujus radius æqualis fuiſſet diſtantiæ aphelii ellipſis ejuſdem à foco.

Contrariam propter cauſam affirmabitur quòd corpus deſcribens ellipſim, donatur majori vi projectionis, quàm ſi deſcripſiſſet circulum cujus radius æqualis fuiſſet diſtantiæ perihelii ellipſis ejuſdem à foco. Et verò ellipſis CBAD eſt minus curva, quàm circulus IKTV; ergo ellipſis CBAD continet majorem vim projectionis, quàm circulus IKTV. Sed radius circuli IKTV eſt linea CF, nempe diſtantia perihelii C ex foco F; ergo corpus quodcumque deſcribens ellipſim, donatur majori vi projectionis, quàm ſi deſcripſiſſet circulum cujus radius æqualis fuiſſet diſtantiæ perihelii ellipſis ejuſdem à foco.

At inquies. Demonſtratum fuit in corollario 2 aſſertionis 2 cap. 7 vim projectionis corporis A deſcribentis circulum AMRN eſſe ſenſibiliter æqualem velocitati quam acquiſiviſſet idem corpus liberè cadens, atque motu uniformiter accelerato percurrens mediam partem radii AF. Jam verò quæritur utrum determinari poſſit vis projectionis quam accepit idem corpus A deſcribens ellipſim ABCD.

Reſp. Vis projectionis quàm accepit corpus A deſcribens ellipſim ABCD eſt ſenſibiliter æqualis velocitati quam acquiſiviſſet idem corpus liberè cadens, atque motu uniformiter accelerato percurrens mediam partem ſemi-axis majoris AO. Et verò ſi corpus donatum vi projectionis quam mox determinavimus, gravitaſſet in punctum O, circulum evidenter deſcripſiſſet cujus radius fuiſſet linea AO; ergo ſi corpus A, hanc eamdem vim projectionis retinens, gravitat in punctum F, deſcribere debet ellipſim ABCD; in hoc enim præcipuè differt ellipſis ABCD à circulo cujus radius fuiſſet linea AO, quòd in illo circulo centrum gra-

vitationis corporis A ſit centrum figuræ O, & in ellipſi ABCD centrum gravitationis corporis A reperiatur extrà centrum figuræ O, nempè in puncto F.

Dices iterum. Quoſnam angulos efformant in ellipſi directio vis tangentialis & directio vis centripetæ?

Reſp. 1°. In Ellipſi directio vis tangentialis & directio vis centripetæ efformant angulum rectum in aphelio A, *fig. 14. tab. 7.* Et verò in aphelio A directio vis tangentialis eſt parameter AX, & directio vis centripetæ eſt pars AF majoris axis AH. Sed parameter AX, & pars AF majoris axis AH angulum rectum efformant. Ergo in Aphelio A directio vis tangentialis & directio vis centripetæ efformant angulum rectum.

Eodem prorsùs modo demonſtrabitur quòd in perihelio H vis tangentialis per lineam H*h* directa, & vis centripeta directa per lineam HF angulum rectum iterùm efforment.

2°. Ex aphelio A in perihelium H directio vis tangentialis & directio vis centripetæ angulos acutos efformant; quod ſic demonſtro. Si Planeta A, in puncto A poſitus, circulum deſcriberet cujus centrum reperiretur in puncto F, vis centripeta Planetæ hujus ita ageret, inſtanti ſecundo, in vim tangentialem, ut directiones duarum illarum virium efformarent angulum rectum, ut demonſtravimus in aſſertione 3 capitis præcedentis. Quo ſuppoſito, ſic ratiocinor.

Vis centripeta planetæ A deſcribentis ellipſim A*m* HM validiùs agit in puncto C in vim tangentialem ejuſdem planetæ, ſeu magis inflectit in puncto C lineam directionis C*c*, quàm inflecteret, ſi deſcriberetur circulus cujus centrum reperiretur in foco F; nam planeta A deſcribens ellipſim A*m* HM donatur minori vi projectionis, quàm ſi deſcriberet circulum cujus radius eſſet linea AF, ut modò demonſtrabamus. Sed vis centripeta planetæ A non poteſt magis inflectere in puncto C lineam directionis C*c*, quàm inflecteret, ſi deſcriberetur circulus cujus centrum reperiretur in foco F quin linea CF & linea C*c* efforment angulum acutum; ergo in puncto C linea CF & linea C*c* efformant angulum acutum. Prob. min. In hypotheſi circuli cum radio AF per planetam

A descripti, vis centripeta planetæ hujus ita inflecteret in puncto C vim tangentialem, ut linea CF & linea Cc efformarent angulum rectum; ergo vis centripeta planetæ A non potest magis inflectere in puncto C lineam directionis Cc, quàm inflecteret, si describeretur circulus cujus centrum reperiretur in foco F, quin linea CF & linea Cc efforment angulum acutum. Eodem prorsùs modo demonstrabitur quòd in omnibus punctis inter aphelium A & perihelium H constitutis, linea directionis vis centripetæ & linea directionis vis tangentialis efformant angulos acutos.

3°. Ex Perihelio H in aphelium A directio vis tangentialis & directio vis centripetæ angulos obtusos efformant. Id autem facilè demonstrabitur, si attendatur ad principium sequens; Planeta A, in perihelio H constitutus, majorem habet vim projectionis, quàm si describeret circulum cujus radius esset linea HF, ut modò demonstrabamus; ergo vis centripeta planetæ A, ex perihelio H in aphelium A ascendentis, debiliùs agere debet in vim tangentialem, quàm si describeretur circulus cum radio HF. Sed in hypothesi circuli cum radio HF descripti, vis centripeta planetæ A, ex puncto H in punctum A ascendentis, inflecteret ad angulum rectum directionem vis tangentialis; ergo in hypothesi ellipsis AmHM per planetam A descriptæ, hæc eadem vis centripeta inflectere debet ad angulum obtusum directionem ejusdem vis tangentialis; ergo in puncto I, *v. g.*, angulus efformatus per lineam IF & per lineam Ii est angulus obtusus; ergo in omnibus punctis inter perihelium H & aphelium A constitutis, obtusi sunt omnes anguli quos efformant lineæ directionis vis centripetæ, & linea directionis vis tangentialis.

PROPOSITIO II.

Vis centripeta corporis cujuscumque circumferentiam ellipticam describentis, est in ratione inversa quadratorum distantiarum à centro virium.

Demonstratur. Vis centripeta corporis circumferentiam ellipticam describentis nihil est aliud quàm vis gravitatis;

ſed vis gravitatis eſt in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum à centro virium, ut demonſtravimus in capite 3 tractatûs hujus; ergo vis centripeta &c.

PROPOSITIO III.

In corpore ellipſim deſcribente vis centrifuga proveniens ex variis motibus circularibus unà cum motu paracentrico inſervientibus ad ellipſim efformandam, eſt in ratione inverſa cuborum diſtantiarum à centro virium.

Explicatur. 1°. Revocemus in memoriam velocitates circulares AE, BF, *fig. 13. tab. 7*, quæ inſervierunt ad informandam lineam curvam ABD, eſſe in ratione inverſa radiorum vectorum, ſeu diſtantiarum à centro C. 2°. Vocemus V velocitatem AE, *u* velocitatem BF, *r* radium vectorem DC 3 pedum, R radium vectorem BC 4 pedum; dico quòd vis centrifuga corporis A in puncto B conſtituti: ad vim centrifugam ejuſdem corporis A in puncto D poſiti :: cubus radii DC, nempè 27: ad cubum radii BC, nempè 64.

Demonſtratur. 1°. Ex lemmate 2 capitis hujus habetur proportio ſequens, $V : u :: r : R$; ergo $VV : uu :: rr : RR$; ergo $VVRR = uurr$; ergo $\frac{VVRRR}{R} = \frac{uurrr}{r}$; ergo $\frac{VV}{R} : \frac{uu}{r} :: r^3 : R^3$.

2°. Ex aſſertione 6 capitis 7, $\frac{VV}{R}$ repræſentat vim centrifugam corporis A girantis in arcu circulari AE, & $\frac{uu}{r}$ repræſentat vim centrifugam corporis A girantis in arcu circulari BF; item r^3 repræſentat cubum radii DC, & R^3 cubum radii BC; ergo vis centrifuga corporis A in puncto B conſtituti: ad vim centrifugam ejuſdem corporis A in puncto D poſiti :: cubus radii vectoris DC : ad cubum radii vectoris BC; ergo in corpore ellipſim deſcribente vis centrifuga proveniens ex variis motibus circularibus unà cum motu paracentrico inſervientibus ad ellipſim efforman-

dam, est in ratione inversa cuborum distantiarum à centro virium.

Solvuntur argumenta opposita.

Obj. 1°. *contra propositionem primam.* Si quid probaret angulos quos efformant directio vis tangentialis & directio vis centripetæ, acutos esse ex aphelio in perihelium, maximè acceleratio motûs planetæ cujuscumque descendentis ex aphelio in perihelium; atqui hæc acceleratio nihil probat; ergo &c. Prob. min. Si acceleratio motûs planetæ descendentis ex aphelio in perihelium probaret acutos esse prædictos angulos, sequeretur quòd illi anguli decrescere deberent usque ad punctum perihelii, falsum c̃quens, ergo & antec. Prob. min. Fatentur omnes Physici quòd anguli quos efformant directio vis tangentialis & directio vis centripetæ decrescant ex puncto aphelii usquè ad extremitatem minoris axis ellipsis, & ex hac extremitate crescant usquè ad punctum perihelii, ergo &c.

Resp. ad 1. *omitto seq. & neg. min. ad* 2. *dist. seq.* Si acceleratio motûs planetæ descendentis ex aphelio in perihelium probaret acutos esse prædictos angulos, sequeretur quòd illi anguli decrescere deberent usquè ad punctum perihelii, supponendo quòd unica detur causa accelerationis motûs in planeta descendente ex aphelio in perihelium, conc. seq. supponendo quòd multiplex detur causa hujus accelerationis, neg. seq. & sic distincta minore, neg. c̃quam. Acceleratur motus planetæ descendentis ex aphelio in perihelium, non solùm propter imminutionem angulorum quos efformant directio vis tangentialis & directio vis centripetæ, sed etiam propter ipsammet vim centripetam quæ multò major est, cùm planeta ad focum accedit.

Contrariam propter causam affirmabitur retardari motum planetæ ascendentis ex perihelio in aphelium, non solùm propter augmentum angulorum quos efformant directio vis tangentialis & directio vis centripetæ, sed etiam propter ipsammet vim centripetam quæ multò minor est versùs aphelium, quàm versùs perihelium.

Hinc ſequitur 1°. velocitatem planetarum majorem eſſe in perihelio, quàm in aphelio.

Sequitur 2°. diſcrimen quod reperitur inter velocitatem planetæ in aphelio ſuo poſiti, & velocitatem ejuſdem planetæ in perihelio ſuo conſtituti, eò majus eſſe, quò ellipſis eſt magis excentrica. Debent igitur cometæ celerrimè moveri in perihelio, & lentiſſimè in aphelio ſuo; in ellipſibus valdè excentricis moventur aſtra hujuſmodi.

At inquies. Cùm Planeta ſemel deſcendit ex aphelio in perihelium, per quid determinatur ad aſcendendum ex perihelio in aphelium?

Reſpondeo. Ex tertia noſtra propoſitione ſequitur Planetam in perihelio conſtitutum agitari per vim aliquam centrifugam quæ major eſt vi centripetâ quâ tunc donatur idem planeta. Propter hunc exceſſum vis centrifugæ ſuprà vim centripetam determinatur aſtrum ad aſcendendum ex perihelio in aphelium. Neque id mirum videbitur ſi attendatur effectum vis centrifugæ, prævalentis ſuprà vim centripetam, eſſe ut corpus effugiat à centro. Cùm autem planeta, in perihelio conſtitutus, effugere non poſſit à centro, quin aſcendat versùs aphelium, debet vis centrifuga eſſe cauſa talis aſcensûs.

Obj. 2°. contra ſecundam propoſitionem. Si in ellipſi vis centripeta ſit in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum à centro virium, ſequeretur quòd planeta deſcribens ellipſim deberet in ſolem cadere, cùm versùs perihelium conſtituitur: nam hac proportione ſuppoſitâ, debet, non procul à perihelio, mirum in modum augeri vis centripeta; falſum tamen c̃quens, ergo & antec.

Reſp. diſt. ſequelam. Si in ellipſi vis centripeta ſit in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum à centro virium, ſequeretur quòd planeta deſcribens ellipſim deberet in ſolem cadere, cùm versùs perihelium conſtituitur, ſi versùs perihelium non augeretur vis centrifuga planetæ, conc. ſeq. Si augeatur vis centrifuga planetæ, neg. ſeq. & conceſsâ minore, neg. c̃quam. Revocetur in memoriam demonſtratio propõonis 3, & difficultas evaneſcet.

Contrariam propter cauſam ex orbita ſua non debet effugere planeta ſuo in aphelio conſtitutus; decreſcit enim vis centrifuga planetæ ex perihelio in aphelium redeuntis.

Inſt. Si in ellipſi vis centripeta ſit in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum à centro virium, ſequitur quòd ellipſis ſit magis curva in perihelio, quàm in aphelio; falſum c̃quens, ergo & antec. Prob. ſeq. Suppoſitâ tali proportione, vis centripeta major eſt in perihelio, quàm in aphelio; ergo ſuppoſitâ tali proportione, ellipſis deberet eſſe magis curva in perihelio, quàm in aphelio; nam curvitas lineæ cujuſcumque pendet à vi centripeta; & major, minorve curvitas pendet à majore, vel minore vi centripeta.

Reſp. ad 1. neg. ſeq. ad 2. diſt. ant. Suppoſitâ tali proportione, vis centripeta major eſt in perihelio, quàm in aphelio; & in perihelio augetur ſola vis centripeta, neg. ant. & in perihelio augentur vis centripeta & vis centrifuga, conc. ant. & neg. c̃quam. In perihelio vis centrifuga impedit ne vis centripeta totalem ſuum ſortiatur effectum.

Obj. 3°. contra tertiam propoſitionem. Supponendo veras & inconcuſſas eſſe tres propoſitiones præcedentes, Planeta A deſcribens ellipſim A*m* H M, *fig. 14. tab. 7*, non debet deſcendere ex aphelio A in perihelium H, ſed debet tantummodò deſcendere ex aphelio A uſque ad punctum S, nempè uſque ad extremitatem S lineæ ordinatæ S F tranſeuntis per focum F; quod ſic probo: in puncto S vis centripeta planetæ A æqualis eſt ipſius vi centrifugæ, quo ſuppoſito, ſic ratiocinor:

Planeta A non poteſt deſcendere ex puncto S in punctum H, niſi vis ipſius centripeta excedat vim centrifugam; ſed in puncto S vis centripeta planetæ A non excedit vim illius centrifugam; ergo planeta A non poteſt deſcendere ex puncto S in punctum H.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. neg. maj. Ex aphelio A in punctum S vis centripeta planetæ A prævaluerat ſuprà vim ipſius centrifugam, & ideò planeta A magis ac magis acceſſerat ad focum F. Quando autem planeta A pervenit ad punctum S, pergit accedere ad focum F, non equidem propter

excessum vis suæ centripetæ suprà vim centrifugam, sed propter acceleraciones jam acquisitas quæ suum debent effectum habere, hoc est, quæ debent trudere Planetam A versùs focum F, quoadusque vis centrifuga, quæ continuò major evadit, destruxerit & quasi annihilaverit acceleraciones omnes acquisitas vis centripetæ. Locum autem habet hæc annihilatio, cùm planeta pervenit ad perihelium H; & ideò in perihelio H definit descensus planetæ A, ut initium sumat ascensus ejus in aphelium.

Inst. 1°. Ex dictis sequitur quòd planeta A debeat accedere ad centrum virium F, etiamsi habeat vim centripetam minorem, quàm vim centrifugam; incredibile cquens, ergo & ant.

Resp. dist. seq. Ex dictis sequitur quòd planeta A debeat accedere ad centrum virium F, etiamsi habeat vim centripetam minorem, quàm vim centrifugam, supponendo quòd planeta A habeat acceleraciones acquisitas vis centripetæ quæ nondum destructæ fuerunt per augmentum vis centrifugæ, conc. seq. secùs, neg. seq. & sic distinctâ minore, neg. cquam. Acceleraciones acquisitæ vis centripetæ suum debent effectum habere, quoadusque destruantur per augmentum vis centrifugæ.

Inst. 2°. Saltem planeta A deberet tantùm ascendere ex perihelio H usquè ad punctum V, ubi iterum datur æqualitas inter vim centrifugam & vim centripetam; quòd sic probo: post punctum V, vis centripeta prævalet suprà vim centrifugam, quia scilicet hæc magis minuitur, quàm illa; ergo &c.

Resp. dd 1. *neg. ant. ad* 2. *dist. ant.* Post punctum V, vis centripeta prævalet suprà vim centrifugam, sed hic excessus nondum destruxit omnes acceleraciones quas produxerat vis centrifuga in planeta A, cono. ant. & hic excessus destruxit, immediatè post punctum V, acceleraciones omnes quas produxerat vis centrifuga in planeta A, neg. ant. & cquam. Usque ad Aphelium A planeta debet ascendere; ibi enim dumtaxat destruuntur per vim centripetam acceleraciones omnes quas produxerat in planeta A vis ipsius centrifuga.

CAPUT

CAPUT IX.

De Regulis motûs in conflictu corporum non elasticorum.

1°. AGimus in hoc capite de communicatione motûs in conflictu corporum perfectè durorum, seu corporum quæ, per percussionem, figuram suam nullo modo mutant.

2°. Præcindimus in hoc eodem capite non solùm à resistentiâ medii in quo moventur corpora sese mutuò percutientia, sed etiam à gravitate eorumdem corporum.

3°. Supponimus corpora dura, sese mutuò percutientia, esse perfectè homogenea, perfectè sphærica, & ipsorum centra in eâdem existere lineâ juxtà quam moventur. His præmissis, sit

REGULA I.

Si duo corpora dura, non elastica, versùs idem punctum moveantur, ambo simul post conflictum in eamdem partem incedent cum summâ virium quas habebant ante conflictum.

Explicatur. Sint duo corpora M, N, fig. 4. tab. 6, quæ moveantur versùs punctum B juxtà lineam AB; dico quòd si corpus M attingat corpus N, illudque percutiat, hæc duo corpora post conflictum simul incedent versùs punctum B cum summâ virium quas habebant ante conflictum. Pergent igitur versùs punctum B hæc duo corpora, simul juncta, cum 10 gradibus virium, supponendo corpori M 6, & corpori N 4 gradus virium.

Demonstratur. Vires conspirantes non sese destruunt per conflictum; sed vires corporum M & N sunt conspirantes; ergo vires corporum M & N non sese destruunt per conflictum, ac proindè cum 10 gradibus virium pergent post conflictum hæc duo corpora, simul juncta, versùs punctum B; ergo in genere si duo corpora dura, &c.

Hinc sequitur quòd corpus percutiens velocitatem suam communicat in ratione molis corporis percussi. Et verò corpus percussum movetur à corpore percutiente; ergo corpus percussum velocitatem accipit moli suæ proportionalem; ergo corpus percutiens velocitatem suam communicat in ratione molis corporis percussi.

Itaque 1°. corpus M, unius libræ, cum 12 gradibus velocitatis occurrens corpori N quiescenti & unius libræ, 6 gradus velocitatis illi communicabit; 9 gradus illi communicasset, si 3 librarum fuisset moles corporis N.

2°. Si corpus M, unius libræ, moveatur versùs punctum B cum 12 gradibus velocitatis, & corpus N, unius libræ, pariter moveatur versùs punctum B cum 8 gradibus velocitatis, corpus M 2 gradus velocitatis corpori N communicabit.

At inquies. Si communicatio velocitatis fit à corpore percutiente in ratione molis corporis percussi, sequitur quòd in motibus conspirantibus summa virium non semper est eadem post, ac erat ante conflictum; quod ut probetur, supponamus corpus M, unius libræ, moveri versùs punctum B cum 12 gradibus velocitatis, & occurrere corpori N, trium librarum, quiescenti; quo supposito, sic ratiocinor:

Ante conflictum, summa virium corporum M & N erat 12, & post conflictum summa virium est 30 graduum; nam corpus M, unius libræ, retinet sibi post conflictum 3 gradus velocitatis, ac proindè 3 gradus virium. Corpus autem N, trium librarum, per conflictum acquirit 9 gradus velocitatis, ac proinde 27 gradus virium; ergo post conflictum summa virium corporum M & N est 30 graduum.

Resp. nego totam hanc argumentationem tanquam de non supponente. Ut cognoscatur summa virium quæ post conflictum reperiuntur in corporibus M & N, multiplicanda est moles duorum illorum corporum, nempe 4, per illorum velocitatem communem quæ in hypothesi præsenti est 3. Jam verò multiplica 3 per 4, & habebis 12, nempe

summam virium quæ post conflictum reperiuntur in corporibus M & N; ergo etiamsi communicatio velocitatis fiat à corpore percutiente in ratione molis corporis percussi, summa virium in motibus conspirantibus eadem est post, ac erat antè conflictum.

Dices iterùm. Quomodò post conflictum reperiri potest velocitas communis duorum corporum quæ versùs idem punctum incedunt?

Resp. Divide summam virium quæ ante conflictum erant in duobus corporibus, per molès duorum illorum corporum; & quotiens velocitatem illorum communem exhibebit. In casu mox proposito divide 12 per 4, & habebis in quotiente 3 velocitatem communem corporibus M & N.

REGULA II.

Si duo corpora, in se invicem directa, sibi occurrant, ambo simul post conflictum incedent juxtà directionem corporis plùs virium habentis, cum differentia, seu excessu virium quæ erant ante conflictum.

Explicatur. Sint duo corpora M & N, mole æqualia, *fig. 3. tab. 6.* Moveatur corpus M versùs punctum B cum 12 gradibus virium, & moveatur corpus N versùs punctum A cum 8 tantùm gradibus virium; dico quòd post conflictum hæc duo corpora, simul juncta, pergent versùs punctum B cum 4 gradibus virium.

Demonstratur. Corpus M & corpus N debent post conflictum versùs punctum B pergere cum 4 gradibus virium, si ex 20 gradibus quos hæc duo corpora habebant ante conflictum, 16 gradus per conflictum elidantur; verum c'quens, ergo & ant. Prob. min. 8 gradus virium per conflictum destruuntur in quolibet ex illis corporibus. Nam vires diametraliter oppositæ & æquales sese invicem elidunt; sed 8 gradus virium in corpore M versùs punctum B directo, & 8 gradus virium in corpore N directo versùs punctum A, sunt vires diametraliter oppositæ & æquales; ergo 8 gradus virium destruuntur in corpore M, & 8 gradus in corpore N.

Hinc sequitur quòd si corpus M & corpus N, ex oppositis partibus in se invicem directa, sibi occurrant, ita ut corpus M habeat 10 gradus, & corpus N pariter 10 gradus virium; illa post conflictum remanebunt immobilia; vires enim æquales, diametraliter oppositæ, sese in conflictu destruunt.

At inquies. Quomodò reperiri potest post conflictum velocitas communis duobus corporibus quæ, ex partibus oppositis in se invicem directa, sibi occurrerunt?

Resp. Divide excessum virium ante conflictum per moles duorum corporum; & quotiens exhibebit velocitatem communem duobus corporibus post conflictum.

Corollarium 1. Sit *m* moles corporis P, & M moles corporis *p*, *fig. 27. tab. 2*; sit etiam $m = 1$, & $M = 1000$; dirigatur denique cum 12 gradibus velocitatis moles *m* in molem M quiescentem, hæc necessariò evenient: 1°. corpus percutiens P totam fermè suam velocitatem communicabit corpori quiescenti *p*. 2°. Corpus percutiens P redibit ad quietem. 3°. Corpus percussum *p* in statu suo quietis perseverabit; tantam enim molem non possunt è loco dimovere 12 gradus velocitatis.

Corollarium 2. Si corpus quodcumque durum, non elasticum, perpendiculariter impingatur in planum quodcumque immobile, non elasticum; corpus illud post conflictum remanebit in quiete in ipsomet puncto percussionis.

Corollarium 3. Si corpus A durum, non elasticum, *fig. 22. tab. 2*, percutiat in puncto B planum immobile, non elasticum, C B D, secundùm directionem obliquam A B, hæc necessariò evenient: 1°. corpus A post occursum movebitur per lineam B D, quia scilicet directio horizontalis B D non adæquatè opponitur directioni obliquæ A B quæ partim est horizontalis, & partim perpendicularis.

2°. Corpus A percutiet punctum B secundùm directionem suam perpendicularem F B, amittetque in illa percussione quidquid habet de motu perpendiculari.

3°. Vis quam conservat corpus A post percussionem, exhibetur per lineam horizontalem A F = B D.

CAPUT X.

De Regulis motûs in conflictu corporum elasticorum.

1°. CORPUS illud est elasticum quod in conflictu figuram mutat, & post conflictum vel sese restituit, vel saltem sese restituere nititur in primam suam figuram.

2°. Supponimus in hoc toto capite corpora de quibus loquemur, esse perfectè elastica, perfectè homogenea & perfectè sphærica; supponimus etiam illa corpora moveri in medio minimè resistibili per lineam rectam.

3°. In conflictu duorum corporum elasticorum duplex est distinguenda velocitas, altera primitiva seu directa, altera vero elastica seu reflexa. Vi directæ velocitatis duo corpora priorem suam figuram amittunt, vi reflexæ velocitatis duo corpora priorem suam figuram resumunt.

REGULA I.

In conflictu duorum corporum elasticorum communicatio directæ velocitatis eodem prorsùs modo fit, ac in conflictu duorum corporum non elasticorum.

Explicatur. Suppono molem corporis elastici M, *fig. 4. tab. 6.*, esse duarum librarum, & velocitatem ejus 8 graduum. Suppono etiam corpus M ferri versùs punctum B, & occurrere corpori N quiescenti cujus moles est etiam duarum librarum; dico quòd communicatio directæ velocitatis, seu velocitatis illius per quam corpus M fertur versùs punctum B, fiet eodem prorsùs modo, ac si corpus M & corpus N essent perfectè dura, hoc est, dico quòd in conflictu corpus percutiens M corpori percusso N 4 gradus velocitatis communicabit.

Demonstratur. Velocitas directa non potest aliter communicari, ac proportionaliter ad molem corporis percussi; ergo in conflictu duorum corporum elasticorum communicatio directæ velocitatis fit eodem prorsùs modo, ac si duo

corpora non essent elastica; nam in conflictu corporum non elasticorum velocitas communicatur proportionaliter ad molem corporis percussi, ut vidimus in capite 9.

REGULA II.

Quandò duo corpora elastica sese, post compressionem, in priorem figuram restituunt, corpus percutiens acquirit ad regrediendum eumdem gradum velocitatis quem amiserat per percussionem; corpus verò percussum acquirit ad progrediendum eumdem gradum velocitatis quem acquisiverat per percussionem.

Explicatur. Cùm corpus M & corpus N de quibus modò loquebamur, sese post percussionem in priorem figuram restituunt, corpus percutiens M acquirit ad regrediendum versùs punctum A tot gradus velocitatis, quot corpori N communicaverat, acquirit ergo corpus percutiens M 4 gradus velocitatis ad regrediendum versùs punctum A, & consequenter remanet immobile; 4 enim gradus velocitatis conservaverat ad recedendum ex puncto A. Corpus autem percussum N iterùm acquirit ad progrediendum versùs punctum B 4 gradus velocitatis, ac proindè versùs illud punctum reverà progreditur cum 8 gradibus velocitatis.

Demonstratur. Reactio æqualis est & contraria actioni. Quo supposito, sic ratiocinor: duo corpora elastica non possunt primam suam figuram resumere, quin in se invicem reagant. Corpus percussum N non potest in corpus percutiens M reagere, quin illi communicet tantam velocitatem ad eundum versùs punctum A, seu ad regrediendum, quantam ab illo acceperat: item corpus percutiens M reagere non potest in corpus percussum N, quin illi communicet tantam velocitatem ad eundum versùs punctum B, seu ad progrediendum, quantam primùm illi communicaverat; alioquin reactio non esset æqualis & contraria actioni; ergo quandò duo corpora elastica, &c.

Confirmatur experientiâ sequenti. Si ex duobus corporibus elasticis æqualibus, aliud quiescat, aliud verò cum determinatâ velocitate corpori quiescenti occurrat; corpus per-

cutiens post occursum remanet immobile, corpus verò percussum cum omni velocitate corporis percutientis progreditur.

At inquies. Quanam de causa in ludo tudiculari (jeu de Billard) lusores quotidiè vident utrumque globum eburneum in motu post percussionem, quamvis alter ex illis duobus globis percusserit globum alterum æqualem qui priùs erat in quiete? Nonne deberet globus percutiens remanere immobilis super tapetium ludi tudicularis, & globus percussus progredi cum omni velocitate globi percutientis?

Resp. Initio capitis hujus supposuimus corpora moveri per solam lineam rectam; hìc autem habet globus percutiens & motum per lineam rectam, & motum rotationis; ergo non mirum est quòd in exemplo allato uterque globus eburneus moveatur post percussionem.

Eamdem propter causam globus eburneus super planum lævigatum impositus, & à manu verticaliter extensa percussus, primùm à manu percutiente per lineam rectam recedit, & paulò post in ipsam per lineam eamdem regreditur.

Corollarium 1. Si duo corpora mole æqualia M & N, *fig. 3. tab. 6*, cum 6 gradibus velocitatis ex partibus oppositis sibi occurrant, cum eâdem velocitate hinc & indè reflectentur. Et verò corpus M & corpus N considerari debent tanquam duo corpora sese mutuò percutientia. Quo supposito, sic ratiocinor: si corpus M & corpus N elaterio carerent, ambo post conflictum quiescerent, ac proindè ambo 6 gradus velocitatis amisissent, ut probavimus in capite præcedenti; sed illa duo corpora sunt elastica; ergo cum hæc duo corpora priorem suam figuram resumunt, corpus percutiens M 6 gradus velocitatis acquirit ad regrediendum; item totidem gradus velocitatis ad regrediendum acquirit corpus percutiens N; ergo si duo corpora mole æqualia cum æquali velocitate ex partibus oppositis sibi occurrant, hinc & indè reflectentur cum eadem velocitate.

Corollarium 2. Si corpus M & corpus N, mole æqualia, *fig. 3. tab. 6*, cum inæquali velocitate ex partibus oppositis sibi occurrant, hinc & indè reflectentur, factâ commutatione

virium. Et verò sit moles corporis M = 2, & velocitas ejus = 6; sit etiam moles corporis N = 2, & velocitas ejus = 2; quo supposito, sic ratiocinor:

1°. Si hæc duo corpora elaterio carerent, ambo post conflictum moverentur versùs punctum B cum 2 gradibus velocitatis, ut probavimus in capite præcedenti.

2°. Cùm hæc duo corpora priorem suam figuram resumunt, corpus percutiens M debet acquirere 4 gradus velocitatis ad recedendum à puncto B, & consequenter corpus percutiens M reflectitur in punctum A cum 2 gradibus velocitatis.

3°. Corpus percussum N, priorem resumendo figuram debet 4 gradus velocitatis acquirere ad progrediendum versùs punctum B, & consequenter corpus percussum N reflectitur in punctum B cum 6 gradibus velocitatis; ergo si duo corpora elastica, mole æqualia, cum inæquali velocitate ex partibus oppositis sibi occurrant, hinc & indè reflectentur facta commutatione virium.

At inquies. Cum duo prædicta corpora priorem suam figuram resumunt, corpus percussum N debet acquirere duos tantùm gradus velocitatis ad progrediendum versùs punctum B; nam, si corpora sese percutientia elaterio caruissent, velocitas communis corporis percussi N post conflictum fuisset duorum tantummodò graduum; ergo falsum est corollarium 2.

Resp. ad 1. neg. ant. ad 2. dist. ant. Si corpus M & corpus N elaterio caruissent, velocitas communis corporis percussi N fuisset duorum tantummodò graduum, sed corpus percussum N habebat ante conflictum 2 gradus velocitatis ad recedendum à puncto B, conc. ant. secùs neg. ant. & æquam. Corpus N considerari debet tanquam corpus percussum & corpus percutiens. Corpus N, prout corpus percussum progredi debet versùs punctum B cum 4 gradibus velocitatis, & prout corpus percutiens resumere debet duos illos gradus velocitatis quos amiserat in conflictu, illosque resumere debet ad regrediendum versùs punctum B; ergo corpus N reflecti debet in punctum B cum 6 gra-

dibus velocitatis, ac proindè verum, est corollarium 2.

Corollarium 3. Si duo corpora M & N, mole æqualia, *fig. 4. tab. 6*, cum inæquali velocitate versùs eamdem partem ferantur, post conflictum, factâ commutatione celeritatis, versùs eamdem partem movebuntur. Sit igitur moles corporis M = 2, & velocitas ejus versùs punctum B = 6. Sit moles corporis N = 2, & velocitas ejus versùs idem punctum B = 2. Quo supposito, sic ratiocinor:

1°. Si corpus M & corpus N elaterio carerent, moverentur ambo post conflictum in punctum B cum 4 gradibus velocitatis communis, ut probavimus in capite præcedenti.

2°. Cum hæc duo corpora priorem suam figuram resumunt, corpus percutiens M acquirit 2 gradus velocitatis ad recedendum à puncto B; ergo corpus percutiens M, ex eo præcisè quòd sit elasticum, progredi debet versùs punctum B cum duobus tantùm gradibus velocitatis.

3°. Corpus percussum N, priorem resumendo figuram, acquirit duos gradus velocitatis ad progrediendum versùs punctum B; ergo corpus N, prout elasticum, progredi debet versùs punctum B cum 6 gradibus velocitatis; ergo si duo corpora elastica, mole æqualia, cum inæquali velocitate versùs eamdem partem ferantur, post conflictum, factâ commutatione celeritatis, versùs eamdem partem movebuntur.

At inquies. Corpus percussum N, priorem resumendo figuram, acquirere debet 4 gradus velocitatis ad progrediendum versùs punctum B; nam corpus percussum N, independenter ab elaterio suo, quatuor habet gradus velocitatis communis versùs punctum B; ergo corpus percussum N, priorem resumendo figuram, acquirere debet 4 gradus velocitatis ad progrediendum versùs idem punctum B; ergo corpus percussum N progredi deberet versùs punctum B cum 8 gradibus velocitatis, & consequenter falsum est corollarium 3.

Resp. ad 2. neg. ant. ad 2. dist. ant. Corpus percussum N, independenter ab elaterio suo, quatuor gradus habet velocitatis communis, sed ex illis 4 gradibus corpus N duos

tantùm gradus acquiſivit in conflictu, conc. ant. ſecùs, neg. ant. & æquam. Corpus percuſſum, priorem ſuam figuram reſumendo, tot debet acquirere gradus velocitatis ad progrediendum, quot jam acquiſiverat, eamdem figuram amittendo.

Corollarium 4. Si corpus elaſticum F, *fig. 12. tab. 1*, perpendiculariter cadat in planum immobile CD, corpus F eamdem omninò lineam in reditu deſcribet, quam deſcripſit in deſcenſu. Et verò ſi corpus F elaterio careret, poſt conflictum quieſceret in puncto B, ac proindè totam ſuam velocitatem amiſiſſet in conflictu, ut probavimus in capite præcedenti; ſed corpus F eſt elaſticum; ergo corpus F, ſuam reſumendo figuram, debet totam amiſſam velocitatem acquirere ad regrediendum per lineam BF.

Corollarium 5. Si corpus elaſticum A, *fig. 12. tab. 1*, incidat in planum immobile CD per lineam obliquam AB, corpus A in partem oppoſitam E per lineam BE reflectetur; quod ſic demonſtro.

1°. Si corpus A elaterio careret, amiſiſſet per conflictum in puncto B vim repræſentatam per lineam perpendicularem FB, & conſervaſſet vim repræſentatam per lineam horizontalem BD, ut probavimus in capite præcedenti.

2°. Corpus A, ſuam in puncto B reſumendo figuram, reſumit vim repræſentatam per lineam perpendicularem BF; ergo corpus A reflectitur per lineam diagonalem BE; tunc enim agitatur eodem tempore à duabus viribus quarum altera horizontalis eſt, altera verò perpendicularis.

3°. Angulus reflexionis EBD æqualis eſt angulo incidentiæ ABC; vires enim quarum ope deſcribuntur diagonales AB & BE, ſunt omninò æquales & eodem prorsùs modo diriguntur.

CAPUT XI.

De Machinis.

1°. NIhil eſt aliud Machina qualiſcumque quàm inſtrumentum aliquod aptum ad motum producendum. Tria conſiderantur in omni machina, potentia ſcilicet, pondus & centrum motûs. Sub nomine potentiæ comprehenditur quidquid inſervit ad pondus vel ſuſtinendum vel movendum. Pondus eſt id omne quod impedit ne machina moveatur per potentiam. Denique centrum motûs eſt punctum illud in machina circà quod moventur aliæ omnes ipſius partes. Sit res in exemplo. Virga ADB, *fig. 23. tab. 2.* vobis machinam exhibet, quæ ſuum habet centrum motûs, ſeu ſuum punctum fixum in puncto D; Manus *p* eſt potentia ipſi applicata, & corpus P eſt pondus quod ſuſtinetur à manu *p*.

Nota tamen quòd, loco manûs, apponi potuiſſet aliud pondus vicem gerens potentiæ, ut videre eſt in figura 27, *tab. 2*, in qua pondus minus P ſuſtinet pondus majus *p*, ac proindè in qua pondus minus P ſe habet ut potentia reſpectu ponderis majoris *p*.

2°. In machina quacumque directio Potentiæ nihil eſt aliud quàm linea recta juxtà quam hæc Potentia vel ſuſtinet, vel movet pondus; directio verò ponderis eſt linea recta juxtà quam pondus vel movetur, vel moveri nititur. Sunt igitur lineæ A*p* & BP; *fig. 23. tab. 2*, totidem lineæ directionis ſive Potentiæ *p*, ſive Ponderis P.

3°. Momentum Potentiæ eſt vis ſecundùm quam aliqua Potentia machinæ applicata agit in pondus aliquod eidem machinæ applicatum; momentum verò ponderis eſt illa vis ſecundùm quam pondus reagit in Potentiam. Vide quæ hac de re diximus in quæſtione 2 capitis 1.

4°. Vectis nihil eſt aliud quàm virga quæcumque habens punctum fixum cujus ope Potentia vecti applicata agit in

pondus eidem vecti applicatum. Vectis erit primæ ſpeciei, ſi punctum fixum exiſtat Potentiam inter & pondus. In vecte ſecundæ ſpeciei Pondus reperitur inter Potentiam & punctum fixum. In vecte tertiæ ſpeciei Potentia reperitur inter punctum fixum & pondus. Injiciantur oculi in figuras 23, 24 & 25 *tab.* 2, quarum prima exhibet vectem primæ, ſecunda vectem ſecundæ, tertia vectem tertiæ ſpeciei.

5°. Linea perpendicularis ducta à puncto fixo vectis in lineam directionis Potentiæ vel ponderis, exhibet diſtantiam Potentiæ vel ponderis à puncto fixo. Exprimit igitur linea DG diſtantiam Potentiæ *p*, & linea DS diſtantiam ponderis P à puncto fixo D vectis ADB, *fig.* 23. *tab.* 2.

Principium generale Mecanices.

Si duæ Potentiæ aut duo Pondera ità applicentur vecti, ut ſint in ratione inverſa diſtantiarum à puncto fixo, hæ duæ Potentiæ, vel hæc duo Pondera erunt in æquilibrio.

Explicatur. Sint duo pondera P & *p* applicata vecti ADB, cujus punctum fixum eſt in D, *fig.* 27. *tab.* 2. Sit moles ponderis P = 2, & diſtantia ejus à puncto fixo D, nempè AD = 6; ſit etiam moles ponderis *p* = 4, & diſtantia ejus à puncto fixo D, nempe BD = 3; dico quòd pondus minus P erit in æquilibrio cum pondere majori *p*.

Demonſtratur. 1°. Linea AD deſignat velocitatem diſpoſitivam ponderis P, & linea DB velocitatem diſpoſitivam ponderis *p*; ſi enim moverentur vectis ADB ſuper ſuum punctum fixum D, eò majorem arcum percurreret, dato tempore, pondus P, quò longior eſt linea AD; item eò minorem arcum, eodem tempore, percurreret pondus *p*, quò brevior eſt linea DB.

2°. Habetur evidenter proportio ſequens; moles Ponderis minoris P : ad molem ponderis majoris *p* : : diſtantia ponderis majoris *p* à puncto fixo D : ad diſtantiam ponderis minoris P ab eodem puncto fixo; nam 2 : 4 : : 3 : 6; ergo pondera P & *p* moles ſuas habent in ratione inversâ diſtan-

tiarum à puncto fixo D vectis ADB cui applicantur.

3°. Non poteſt haberi proportio ſuperior, quin pondera P & *p* moles ſuas habeant in ratione inverſa velocitatum ſuarum diſpoſitivarum.

4°. Pondera P & *p* moles ſuas habere non poſſunt in ratione inverſa velocitatum ſuarum diſpoſitivarum, quin habeatur æquatio ſequens, productum ex mole & velocitate ponderis P æquale eſt producto ex mole & velocitate ponderis *p*.

5°. Haberi non poteſt æquatio ſuperior quin pondus P & pondus *p* vires habeant æquales, & ſint conſequenter in æquilibrio; ergo ſi duæ potentiæ aut duo pondera ità applicentur vecti, ut ſint in ratione inverſa diſtantiarum ſuarum à puncto fixo, hæ duæ potentiæ, vel hæc duo pondera erunt in æquilibrio.

At inquies. Si verum eſt Principium generale Mecanices, ſequitur quòd quò minùs pondus vecti applicatum diſtat à puncto fixo, eò minorem opponit reſiſtentiam, falſum experientiâ conſequens, ergo & ant. Prob. min. Nihil omninò ſecari poteſt ope forficum (ciſeaux), cùm res ſecanda tangit punctum fixum; ergo falſum eſt quòd, quò minùs pondus vecti applicatum diſtat à puncto fixo, eò minorem opponat reſiſtentiam.

Reſp. ad 1. conc. ſeq. & neg. min. ad 2. diſt. ant. Nihil omninò ſecari poteſt ope forficum, cùm res ſecanda tangit punctum fixum, & id accidit propter minorem rei ſecandæ diſtantiam à puncto fixo, neg. ant. & id accidit propter aliam cauſam phyſicam, conc. ant. & neg. conſam. Id accidit quia cùm machina difficiliùs movetur, cùm res ſecanda non diſtat à puncto fixo forficum. Sunt autem forfices duplex vectis primi generis, quibus eſt unicum punctum fixum commune. Eò ſunt igitur validiores, eòque utiliores forfices, quò longiora ſunt ipſorum brachia.

Quod dixi de forficibus, hoc & dicatur proportionaliter de forcipibus. (Tenailles).

Dices iterum. Ad quamnam vectis ſpeciem revocantur remi nautici?

Resp. Remi nautici sunt totidem vectes secundi generis. Et verò in remis nauticis pondus seu navicula, reperitur inter potentiam, seu manum, in una remi extremitate applicatam, & punctum fixum in altera ejusdem remi extremitate constitutum; ergo remi nautici sunt totidem vectes secundi generis. Punctum autem fixum remi cujuslibet positum est in illa parte remi quæ resistentiam aquarum experitur.

Hinc vides quàm evidenter à Principio nostro pendeat explicatio mecanismi forficum, forcipum & remorum nauticorum. Inservit etiam hoc idem principium ad alias omnes machinas, quarum præcipuæ sunt libra, statera, axis in peritrochio, rotæ dentatæ, Trochlea, cuneus, cochlea simplex & composita, planum inclinatum.

DE LIBRA.

Libra ADE (Balance) *fig. 6. tab. 6*, constat puncto fixo, jugo, manubrio, funiculis & lancibus.

Punctum fixum existit in clavo I.

Jugum DE quod liberè movetur circà clavum I, dividitur in duo brachia perfectè æqualia DC, BE.

Intrà manubrium AB exaratur lingula quæ abscondita remanet, quotiescumque libra per manubrium sustinetur vacua; eam ob rem vocatur *examen* hæc lingula.

Denique duæ lances F, G non solùm æquales sunt & æquiponderantes, sed & pendent ex funiculis æqualibus.

Ex hac descriptione hæc sequuntur evidenter. 1°. Libra est vectis primæ speciei; nam punctum fixum I reperitur inter pondera in lancibus F & G collocata, quorum alterum vicem gerit potentiæ, alterum verò ponderis.

2°. Duo pondera æqualia in lancibus F & G posita, remanere debent in æquilibrio; eadem est enim illorum quantitas materiæ, & distantia à puncto fixo.

3°. Libra maximè dolosa illa est cujus brachia, licet inæqualia, sunt in æquilibrio perfecto, dum lances sunt vacuæ, eò quòd brachii brevioris crassities longitudinem alterius exactè compenset. Sit, *v. g.*, libra FBC, *fig. 7.*

tab. 6, cujus brachium craſſius AB ſit 5, & brachium minùs craſſum AC 6 digitorum longitudinis. Maneant in æquilibrio duæ lances D & E, dum hæc machina per manubrium AF vacua ſuſtinetur; dico quòd perſeverabit æquilibrium, cum imponetur lanci D pondus 6, & lanci E pondus 5 librarum. Neque ſanè difficilis eſt aſſertionis hujus demonſtratio; nam hæc duo pondera ſunt in ratione inverſa diſtantiarum à puncto fixo A, ergo debent eſſe in æquilibrio.

DE STATERA.

Conſtat ſtatera BCD (Romaine) *fig. 8. tab. 6*, puncto fixo, virgâ, unco, manubrio ſeu ansâ, & pondere mobili.

Punctum fixum, circà quod ſtatera movetur, reperitur in puncto, ſeu clavo C. Virga BD dividitur in duo brachia inæqualia BC & CD.

Uncus A poteſt plùs, minùſve diſtare à puncto fixo C; ſupponatur diſtans uno pollice ab illo puncto.

Manubrium ſeu anſa HC inſervit ad ſtateram ſuſtinendam.

Denique pondus M vicem gerit Potentiæ, atque ità eſt mobile, ut nunc 1, nunc 2, nunc 3, pollicibus &c. diſtare poſſit à puncto fixo C.

Sit igitur pondus M unius libræ, & brachium CD diviſum in 7 pollices; pondus M poſitum in puncto 1, erit in æquilibrio cum pondere unius libræ impoſito unco A; idem pondus M ſucceſſivè poſitum in punctis 2, 3, 4 &c. erit in æquilibrio cum ponderibus 2, 3, 4 librarum &c. ſucceſſivè impoſitis unco A.

Jam verò ſupponamus pondus M eſſe 2 librarum; pondus illud ſucceſſivè poſitum in punctis 1, 2, 3, 4 &c. erit in æquilibrio cum ponderibus 2, 4, 6, 8 librarum ſucceſſivè unco A impoſitis: quæ omnia, poſito Principio noſtro generali, demonſtratione non indigent.

Hinc ſequitur evidenter ſtateram eſſe vectem primi generis; nam punctum fixum C reperitur inter Potentiam M & pondus P.

De axe in Peritrochio.

Axis in Peritrochio CD (cabeſtan, Tour) *fig. 12, tab. 6*, conſtat puncto fixo, cylindro, radiis, funè & pondere.

In illa machina punctum fixum exiſtit in ipſomet axi cylindri CD. Cylindro huic infiguntur plures, paucioreſve radii I, H, E, G &c.; circàque illum circumvolvitur funis MN, cui annectitur pondus P.

Ex hac deſcriptione hæc ſequuntur evidenter. 1°. Axis in peritrochio eſt vectis primi generis; nam axis cylindri CD, ſeu punctum fixum, reperitur inter pondus P, & varias Potentias variis radiis I, H, E, G applicatas.

2°. Diſtantia ponderis P à puncto fixo repræſentatur per ſemi-diametrum cylindri CD, & diſtantia Potentiæ cujuſcumque deſignatur per longitudinem radii cujuſlibet I, H, E, G; dum enim Potentia circulum unum circà axim abſolvit, funis MN ſemel tantùm circà cylindrum CD circumvolvitur. Si igitur ſemi-diameter cylindri CD : ad radium quemlibet G vel H :: 1 : 10, Potentia quæ, ſibi derelicta, in æquilibrio eſſet cum pondere 100 librarum, machinæ hujus ope pondus decuplum ſeu 1000 librarum facilè ſuſtineret, dummodò in ipſamet extremitate radii ſui collocaretur hæc Potentia.

3°. Si funis MN ità circumvolvatur cylindro CD, ut ſpiræ ſpiris imponantur, fiet major trahendi difficultas; augetur enim ſemi-diameter cylindri CD, & conſequenter augetur diſtantia ponderis à puncto fixo.

4°. Quod dictum fuit de axe in Peritrochio, hoc & dictum pura de illa machina quam *Gruem* appellamus. Diſtantia enim ponderis à puncto fixo repræſentatur per ſemi-diametrum cylindri, & diſtantia Potentiæ per ſemi-diametrum rotæ.

De Rotis dentatis.

Machina quæ repræſentatur per figuram 17 tabulæ 6, conſtat rotâ non dentatâ B cujus axi conjungitur rotula dentata

dentata C. Conſtat etiam rotâ dentatâ D cujus axi conjungitur rotula dentata E. Conſtat denique rotâ dentatâ F cujus axi conjungitur cylindrus G, circà quem circumvolvitur funis cui annectitur pondus H.

Supponamus igitur 10 eſſe dentes in rotula C, & 100 in rota D. Supponamus etiam non plures eſſe dentes in rotula E, quàm in rotula C; neque plures eſſe in rota F, quàm in rota D. Supponamus denique dentes rotularum C & E aptiſſimè congruere dentibus rotarum D & F. Quo ſuppoſito, ſic ratiocinor.

Potentia A applicata rotæ B 10 circumvolutiones conficiet eo præcisè tempore quo rota D circuitum unum abſolvet. Pariter rota D 10 circumvolutiones conficiet, eo præcisè tempore quo rota F & cylindrus G circuitum unum abſolvent; ergo rota B movetur deciès celeriùs quàm rota D, & centiès celeriùs quàm rota F; ergo, ſupponendo circumferentiam cylindri G ſubduplam circumferentiæ rotæ B, Potentia A rotæ B applicata, ducentiès celeriùs movebitur quàm pondus H; ergo, ſi loco Potentiæ, pondus aliquod applicetur rotæ B, pondus illud velocitatem habebit ducentiès majorem, quàm pondus H cylindro G annexum, & conſequenter, machinæ hujus ope, pondus unius libræ in æquilibrio erit cum pondere 200 librarum.

Apponi potuiſſent 4, 5, 6 aut 7 rotæ, & tunc quaſi in infinitum augeretur velocitas Potentiæ ſuprà velocitatem ponderis.

De Trochlea immobili.

Trochlea (Poulie), *fig. 9. tab. 6*, conſtat orbiculo B D circà ſuum axim C verſatili. Immobilis eſt hæc trochlea, ejus enim axis reperitur in loculamento immobili C F. Quàm facilè revocetur hæc machina ad vectem primi generis, id per ſe patet; nam punctum fixum C reperitur inter Potentiam A & pondus E. Neque, machinæ hujus ope, augetur velocitas Potentiæ ſuprà velocitatem ponderis; quantum enim ſpatium Potentia A deſcendendo percurrit, tantum præcisè ſpatium pondus E percurrit aſcen-

dendo. Neque tamen hinc inferatur nullum posse ex hac machina emolumentum hauriri; hujus enim ope non ità atteruntur funes, pauciores dantur affrictus, & multò commodior est Potentiæ situs.

De Trochlea mobili.

Trochlea mobilis BEC, *fig. 20. tab. 6*, revocatur ad vectem secundi generis; hæc enim machina suum habet punctum fixum in clavo A cui religatur altera funis extremitas; ergo in hac machina pondus R constituitur inter punctum fixum A, & Potentiam in puncto D collocatam; ergo revocanda est trochlea BEC ad vectem secundi generis.

Machinæ hujus ope, dupla est velocitas Potentiæ D velocitatis ponderis R; quod sic paucis demonstro.

Impossibile est trochleam BEC ascendere ex puncto E in punctum H, quin Potentia D duo funis segmenta DC & AB adducat. Sed si Potentia D duo funis segmenta DC & AB adducit eo præcisè tempore quo trochlea CEB ascendit ex puncto E in punctum H, velocitas Potentiæ D dupla est velocitatis ponderis R; ergo trochleæ mobilis ope, velocitas Potentiæ D dupla est velocitatis ponderis R. Prob. min. Cùm trochlea CEB ascendit ex puncto E in punctum H, tùm pondus R percurrit spatium repræsentatum per lineam EH; cùm autem Potentia D adducit duo funis segmenta DC & AB, tùm percurrit spatium repræsentatum per duas lineas DC & AB; quod spatium est evidenter duplum spatii repræsentati per lineam EH; ergo si Potentia D duo funis segmenta DC & AB adducit eo præcisè tempore quo trochlea CEB ascendit ex puncto E in punctum H, velocitas Potentiæ D dupla est velocitatis ponderis R.

Nota quòd machina in qua junguntur trochleæ mobiles trochleis immobilibus gallicè vocatur *Poulies mouflées*, duplicatur velocitas Potentiæ, cùm trochleæ uni mobili jungitur trochlea una immobilis; & quadruplicatur, cùm unà reperiuntur quatuor trochleæ quarum duæ immobiles

sunt & duæ mobiles. Trochleis mobilibus & immobilibus constant figuræ 38 & 39 tabulæ 3.

De Cuneo.

Cuneus (*Coin*) nihil est aliud quàm prisma triangulare cujus apex in acumen desinit. Efformatur cuneus ex aliqua materia solida, quale est lignum aut ferrum, illoque utimur ad findendum lignum, divellendos lapides, aliaque corpora fissilia dividenda. Basis cunei A B D, *fig. 37. tab. 3*, est linea A B, & linea P D exhibet ejus altitudinem. In hac machina velocitas Potentiæ tantùm superat velocitatem ponderis, seu resistentiæ partium dividendarum, quantùm altitudo cunei superat ipsius basim. Et verò suppono quòd, factâ in corpore ligneo H rimâ aliquâ, intrudatur apex D cunei A B D. Quo supposito, sic ratiocinor :

Impossibile est partes ligni H à se invicem recedere secundùm spatium basis A B, quin cuneus percurrerit intrà, lignum illud spatium P D ; ergo velocitas Potentiæ cuneo utentis exprimitur per altitudinem P D, & velocitas resistentiæ partium ligni per basim A B ; ergo in cuneo velocitas Potentiæ : ad velocitatem resistentiæ :: altitudo P D cunei A B D : ad basim A B cunei ejusdem.

Quò igitur acutior est cuneus, eò majores etiam vires confert ; quò enim acutior est cuneus, eò major est ejus altitudo, & eò minor est basis ipsius.

De Cochlea simplici.

Cochlea simplex (Vis) *fig. 28. tab. 6*, componitur cylindro A B in varias spiras solidas & exuberantes elaborato qui inditur alteri cylindro D E in spiras concavas efformato, ita ut convexæ spiræ cylindri A B optimè quadrent concavis spiris cylindri D E. Cylindro A B communiter additur radius A C, cujus ope Potentia cochleæ applicata circumferentiam circuli describit. Machinam hanc adhibere solemus, quotiescumque quidpiam stringere volumus ;

tantùm enim velocitas Potentiæ ſuperat velocitatem reſiſtentiæ, quantùm circumferentia quam deſcribit Manus C cum radio AC ſuperat ſpatium MN, nempe intervallum duas inter ſpiras comprehenſum. Neque ſanè difficilis eſt rei hujus demonſtratio. Quotieſcumque enim in prælo vinario racemi comprimendi percutrunt ſpatium MN, toties Potentia ſtringens deſcribit circulum cujus radius eſt linea AC.

De Cochlea compoſita.

Cochlea compoſita quam vocare ſolemus cochleam infinitam (Vis ſans fin), repræſentatur per figuram 19 tabulæ 6. Conſtat hæc machina cylindro BC, cujus ſpiræ convexæ inſeruntur in denticulos rotæ R. In hujus rotæ centro conſtituitur tympanum A, circà quod circumvolvitur funis S ex quo pendet pondus P. Ità commiſcetur cylindrus BC cum rotâ R, ut, quotieſcumque Potentia M manubrio cylindri applicata circumvolutionem unam conficit, unicus tantùm denticulus rotæ R impellatur. Si igitur 50 ſunt denticuli in circumferentia rotæ R, Potentia M 50 circumvolutiones conficiet, eo præcisè tempore quo rota R, & tympanum A in centro rotæ conſtitutum, circumvolutionem unam abſolvent. Jam verò ſuppono manubrium cylindri BC quadruplum eſſe ſemi-diametri tympani A; dico quòd in illa machina velocitas Potentiæ M ducentiès erit major velocitate ponderis P, quod ſic demonſtro:

Velocitas Potentiæ M deſignatur per circumvolutiones manubrii cylindri BC, & velocitas ponderis P per circumvolutiones tympani A; ergo in cochleâ compoſitâ velocitas Potentiæ M ducentiès major eſt velocitate ponderis P. Prob. quam. Una circumvolutio manubrii cylindri BC quadrupla eſt unius circumvolutionis tympani A, & Potentia M 50 circumvolutiones manubrii conficit, eo præcisè tempore quo tympanum A circumvolutionem unam abſolvit; ergo ſi velocitas Potentiæ M deſignatur per circumvolutiones manubrii cylindri BC, & velocitas ponderis P per circumvolutiones tympani A; in cochleâ compoſitâ velocitas Potentiæ M ducentiès major eſt velocitate ponderis P.

De plano inclinato.

Planum inclinatum illud eſt quod angulum acutum efformat cum linea horizontali. Linea CB, *fig. 13. tab. 6*, exhibet planum inclinatum; illa enim efformat angulum acutum cum linea horizontali BE. Plani hujus longitudo repræſentatur per lineam obliquam CB, & ejus altitudo per lineam perpendicularem CE. Machinâ hac utimur ad faciliùs attollenda pondera; in hac enim machinâ velocitas Potentiæ P trahentis pondus A, tantùm ſuperat velocitatem ponderis A aſcendentis per planum BC, quantùm linea BC exprimens plani hujus longitudinem, ſuperat lineam CE quæ plani ejuſdem altitudinem exhibet. Quod ut demonſtretur, fiat BH = CE; quo facto, ſic ratiocinor:

Pondus A aſcendet ex puncto B in punctum H eo præcisè tempore quo Potentia P deſcendet ex puncto C in punctum E; ergo velocitas Potentiæ P repræſentatur per lineam CE, & velocitas ponderis A per lineam perpendicularem GH. Sed CE : GH :: BC : BH vel CE; ergo velocitas Potentiæ P : ad velocitatem ponderis A :: BC : CE : : plani longitudo BC : ad ejus altitudinem CE.

At inquies. Quanam de cauſa linea GH exprimit velocitatem ponderis A aſcendentis ex puncto B in punctum H; nonne linea BH velocitatem illam exprimere deberet?

Reſp. Pondus A, in puncto H conſtitutum, tàm diſtat ex puncto C aſcendendo per lineam obliquam BH, quàm diſtaret, ſi aſcendiſſet per lineam perpendicularem GH; ergo linea GH exprimere debet velocitatem ponderis A aſcendentis ex puncto B in punctum H.

Ex dictis hæc ſequuntur evidenter: 1°. Quò magis planum eſt inclinatum, eò faciliùs etiam pondus attollitur, quò magis enim planum eſt inclinatum, eò magis etiam ipſius longitudo ſuperat ejus altitudinem.

2°. Si longitudo plani cujuſcumque tripla ſit ejus altitudinis, pondus 100 librarum decidens per lineam perpendicularem CE erit in æquilibrio cum pondere 300 librarum aſcendente per lineam obliquam BC.

3°. Difficultas quam experiretur Potentia in elevando perpendiculariter pondere ex puncto E in punctum C: ad difficultatem quam experitur eadem Potentia in elevando obliquè eodem pondere ex puncto B in punctum C:: plani longitudo BC: ad plani altitudinem CE.

CAPUT XII.

De Resistentiis.

MIretur nemo quòd exactè non eveniant in praxi quæcumque demonstravimus in hoc nostro Mecanicæ tractatu; in illo enim præcisionem fecimus eorum omnium obstaculorum quæ sub *resistentiarum* nomine designantur à Physicis. Hac de re satis abundè disseruimus in responsione ad epistolam 14 nostri hujus commentarii. Legantur tamen, quàm attentissimè fieri poterit, 7 regulæ sequentes.

Regula 1. Corpus solidum non potest fluidum aliquod ingredi, in eoque moveri, quin resistentiam aliquam patiatur, atque aliquid de suo motu amittat.

Demonstratio. Corpus solidum non potest fluidum aliquod ingredi, in eoque moveri, quin partes hujus fluidi separet & impellat, atque consequenter illis aliquid de suo motu communicet; ergo vera est regula 1.

Corollarium. Corpus solidum non potest fluidum aliquod ingredi, in eoque moveri, quin geminam resistentiam experiatur. Prima oritur à cohæsione & tenacitate partium fluidi; secunda provenit ex vi inertiæ ejusdem fluidi.

Annotatio. Brevitatis causâ, vocabitur resistentia proveniens à cohæsione partium fluidi, *resistentia primi generis*; vocabitur etiam *resistentia secundi generis* illa quæ provenit à vi inertiæ fluidi.

Regula 2. Resistentia primi generis est in ratione directa cohæsionis & tenacitatis partium fluidi.

Demonstratio. Quo major est cohæsio & tenacitas partium

fluidi, eò difficiliùs partes ejus ſeparantur aliæ ab aliis, & conſequenter eò majorem fluidum illud opponit reſiſtentiam primi generis; ergo vera eſt regula 2.

Corollarium. Reſiſtentia primi generis minor eſt in aqua, quàm in oleo & vix ſenſibilis eſt in mercurio.

At inquies. Si vera foret regula 2, ſequeretur quòd reſiſtentia primi generis minor foret in aqua calida, quàm in eadem aqua frigida; nam fluidum quodcumque calidum ſuas habet partes magis diviſas, quàm fluidum idem frigidum; atqui reſiſtentia primi generis non eſt minor in aqua calida, quàm in aqua frigida; ergo vera non eſt regula 2. Prob. min. Newtonus expertus eſt reſiſtentiam primi generis æqualem eſſe in aqua calida & in eadem aqua frigida, ergo &c.

Reſp. ad 2. conc. ſeq. & neg. min. ad 2. neg. ant. Numquam Newtonus aſſeruit reſiſtentiam primi generis eamdem omninò eſſe in aqua calida, & in eadem aqua frigida; is dumtaxat aſſeruit reſiſtentiam illam eſſe fermè æqualem in aqua calida, & in eadem aqua frigida.

Ex experientia ſua non infert Newtonus reſiſtentiam primi generis minui non poſſe per calorem fluido cuicumque communicatum, ſed partes aquæ non eſſe multùm inter ſe cohærentes & tenaces.

Regula 3. Reſiſtentia primi generis, cæteris omnibus æqualibus, eſt in ratione directa ſuperficierum corporum quæ moventur in quocumque fluido.

Explicatur. Suppono ſuperficiem globi A quadruplam eſſe ſuperficiei globi B: ſuppono etiam hunc utrumque globum moveri in eodem fluido cum eadem velocitate; dico quòd reſiſtentia primi generis quam patitur globus A : ad reſiſtentiam primi generis quam patitur globus B :: 4 : 1.

Demonſtratur. Numerus partium fluidi quas globus A ſeparandas habet, quadruplus eſt numeri partium fluidi quas ſeparandas habet globus B; ergo reſiſtentia primi generis quam patitur globus A : ad reſiſtentiam primi generis quam patitur globus B :: 4 : 1, & conſequenter vera eſt regula 3.

Regula 4. Reſiſtentia primi generis, cæteris omnibus æqualibus, eſt in ratione directa temporis adhibiti in fluido quocumque trajiciendo.

Explicatur. Suppono corpus A trajicere fluidum aliquod intrà ſpatium unius horæ, & corpus B intrà ſpatium duarum horarum; dico quòd reſiſtentia primi generis quam patitur corpus A: ad reſiſtentiam primi generis quam patitur corpus B :: 1 : 2.

Demonſtratur. Reſiſtentia primi generis quam experitur ex parte fluidi corpus quodcumque ſolidum, eò minor eſt, quò brevius eſt tempus adhibitum in illo fluido trajiciendo; ergo vera eſt regula 4. Prob. ant. Reſiſtentia primi generis eò minor eſt reſpectu corporis ſolidi, quò faciliùs corpus ſolidum ſeparat partes fluidi alias ab aliis; ſed quò brevius eſt tempus adhibitum in aliquo fluido trajiciendo, eò faciliùs corpus ſolidum ſeparat partes fluidi alias ab aliis; ergo reſiſtentia primi generis quam experitur ex parte fluidi corpus quodcumque ſolidum, eò minor eſt, quò brevius eſt tempus adhibitum in illo fluido trajiciendo.

At inquies. Suppono corpus A trajicere intrà ſpatium unius horæ fluidum aliquod homogeneum, & corpus B, æquale corpori A, medietatem tantùm ejuſdem fluidi intrà idem omninò tempus trajicere. Quo ſuppoſito, ſic ratiocinor: Ex regula 4 ſequitur evidenter corpus A & corpus B experiri eamdem omninò reſiſtentiam primi generis; falſum c̃quens, ergo & ant. Prob. min. Corpus A reſiſtentiam majorem primi generis experitur; nam plures partes ſeparat in fluido, quàm corpus B; ergo &c.

Reſp. admiſſo ſuppoſito, ad 1. conc. ſeq. & neg. min. ad 2. neg. ant. ad 3, diſt. ant. Corpus A plures partes ſeparat in fluido, quàm corpus B, ſed corpus A faciliùs illas ſeparat, conc. ant. ſecùs, nego ant. & c̃quam. Hæc per ſe patent.

Corollarium. Reſiſtentia primi generis, totaliter ſumpta, eſt in ratione compoſitâ graduum cohæſionis partium fluidi inter ſe, ſuperficiei corporis ſolidi, & temporis in trajiciendo fluido adhibiti. Hæc neceſſariò ſequuntur ex regulis 2, 3, 4.

Regula 5. Resistentia secundi generis proportionalis est densitati fluidi.

Demonstratur. Resistentia secundi generis proportionalis est quantitati materiæ quam, intrà datum tempus, corpus solidum, fluidum quodcumque trajiciens, è loco suo dimovere debet; sed quantitas materiæ quam, intrà datum tempus, corpus solidum, fluidum trajiciens, è loco suo dimovere debet, proportionalis est densitati fluidi; ergo resistentia secundi generis proportionalis est densitati fluidi, & consequenter vera est regula 5.

Confirmatur hæc regula experimentis sequentibus. Newtonus effecit ut pendula ferrea successivè oscillarentur in argento vivo, in aquâ & in aere. Ex illis experimentis prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ, ut 13 vel 14 ad 1 circiter, ideſt, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Prodiit etiam resistentia aquæ ad resistentiam aeris, ut 850 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quàm proximè. Vide hæc omnia apud Newtonum sub finem sectionis 6 libri 2 Philosophiæ naturalis Principiorum mathematicorum.

Regula 6. Resistentia secundi generis, cæteris omnibus æqualibus, proportionalis est superficiei corporis fluidum quodcumque trajicientis.

Hæc regula explicatur & demonstratur eodem fermè modo ac regula 3; superficies enim quadrupla quantitatem quadruplam materiæ è loco suo, dato tempore, dimovet; ergo, dato tempore, superficies quadrupla patitur resistentiam quadruplam secundi generis.

Regula 7. Auctâ velocitate corporis solidi fluidum quodcumque trajicientis, augetur & resistentia secundi generis quam corpus solidum experitur ex parte fluidi.

Explicatur. Sit globus A perfectè æqualis globo B. Moveatur uterque globus in eodem fluido, hic cum 1 gradu, ille cum 2 gradibus velocitatis; dico quòd resistentia secundi generis quam, intrà datum tempus, globus A patitur: ad resistentiam secundi generis quàm, intrà idem tempus, experitur globus B :: 2 : 1.

Demonstratur. Velocitas globi A : ad velocitatem globi

B :: 2 : 1 ; ergo quantitas materiæ quam, intrà datum tempus, globus A dimovet è loco ſuo : ad quantitatem materiæ quam, intrà idem tempus, globus B è loco dimovet :: 2 : 1 ; ergo reſiſtentia ſecundi generis quam, intrà datum tempus, globus A patitur : ad reſiſtentiam ſecundi generis quam, intrà idem tempus, experitur globus B :: 2 : 1 ; ergo vera eſt regula 7.

Corollarium. Reſiſtentia ſecundi generis totaliter ſumpta, eſt in ratione compoſita denſitatis fluidi, ſuperficiei corporis ſolidi, & velocitatis ipſius. Hæc ſequuntur evidenter ex regulis 5, 6 & 7.

Quod autem ſpectat ad alias reſiſtentiarum ſpecies, conſule commentarii noſtri reſponſionem ad epiſtolam decimam quartam.

L'ANTI-MATÉRIALISME

OU

L'impoſſibilité d'expliquer la nature de la penſée par les loix de la Mécanique.

INTRODUCTION.

LEs prétendus eſprits forts de ce ſiecle, connus ſous le nom de *Philoſophes modernes*, nous aſſurent dans leurs écrits ténébreux qu'il eſt facile d'expliquer la nature de la penſée par les loix de la Mécanique. Ils concluent de cette impie & inſenſée aſſertion, que l'ame de l'homme, eſſentiellement matérielle, périt néceſſairement avec ſon corps.

Des Auteurs d'un mérite diſtingué ont fait paroître contr'eux des ouvrages marqués au coin de l'immortalité. Ils ſe ſont ſur-tout attachés à leur prouver démonſtrativement que les Matérialiſtes ſont les ennemis les plus déclarés de toute eſpece de religion. Perſonne ne reſpecte plus que moi ces zélés défenſeurs du nom chrétien. Ils me permettront bien cependant de leur faire remarquer qu'ils n'ont prouvé dans le fond que ce dont les Matérialiſtes eux-mêmes ſe font gloire de convenir. Prenons donc une route toute différente. Les Matérialiſtes ſe piquent de paſſer pour Phyſiciens & pour Mathématiciens ; démontrons leur qu'il faut ignorer les premieres regles de la Phyſique & de la Mécanique pour oſer avancer que le mouvement puiſſe communiquer à la matiere, fût-elle diviſée à l'infini, le moindre degré de penſée & de perception ; ajou-

tons leur qu'il n'eſt qu'un mince phyſicien qui ne reconnoiſſe pas dans la matiere une incapacité eſſentielle & radicale à pouvoir jamais devenir un *être penſant.*

C'eſt encore dans la forme ſcholaſtique que nous allons donner au public nos démonſtrations métaphyſiques, phyſiques & morales ſur cette matiere. Il eſt maintenant trop néceſſaire de prémunir les jeunes Étudiants en philoſophie contre les faux raiſonnements des libertins de ce ſiecle, pour ne pas préférer cette forme à toutes les autres.

APPENDIX I.

DE ANTI-MATERIALISMO.

SEU

De impoſſibilitate exponendi per leges Mecanicæ naturam cogitationis.

1°. PHiloſophi materialiſtæ ii ſunt qui, cùm contendant materiam vel reipsà cogitare, vel ſaltem eſſe cogitandi capacem, naturam cogitationis tentant exponere per principia purè mecanica.

2°. Duplex eſt ordo materialiſtarum. Materialiſtæ primi ordinis agnoſcunt equidem Deum ſpiritualem, immenſum, omnipotentem & infinitum; ſed hi ſimul affirmant Deum hunc nil niſi ſubſtantias materiales creaſſe, ac proindè animas hominum pûram eſſe materiam. Materialiſtæ autem ſecundi ordinis idem omninò de Divinitate ſentiunt ac materialiſtæ primi ordinis. In hoc præcisè poſitus eſt illorum error, quòd affirmare non audeant materiam eſſe per eſſentiam ſuam cogitandi incapacem.

3°. Subſtantia materialis eſt ſubſtantia per ſeipſam iners, diviſibilis, capax figuræ, motûs, quietis, naturaliter impenetrabilis, & naturaliter extenſa in longum, latum & profundum.

4°. Subſtantia ſpiritualis eſt ſubſtantia activa, indiviſibilis, penetrabilis, capax percipiendi, judicandi, diſcurrendi, volendi, nolendi, dubitandi, timendi, & ſuper actus ſuos reflectendi.

5°. Cogitatio eſt actus qui producitur à ſubſtantia cogitante, & qui in eâdem ſubſtantiâ recipitur per modum modificationis, ut aiunt Metaphyſici. Sub nomine autem cogitationis comprehenduntur perceptiones, judicia, diſcurſus &c.

6°. Alii inter Materialiſtas aſſerunt naturam cogitationis rectè explicari poſſe per certum quemdam motum particulis materiæ impreſſum; talis eſt Hobbeſius, & cum illo omnes omninò Materialiſtæ quos, brevitatis causâ, *Hobbeſianos* appellabo. Alii verò fatentur ingenuè ſe naturam cogitationis prorsùs ignorare; ſed hi ſimul addunt demonſtrari non poſſe demonſtratione rigoroſa materiam eſſe, etiam de potentia Dei abſoluta, cogitandi incapacem. Paſſim diſſeminatur hic error in opere pernicioſo Lockii cui titulus eſt: *Eſſai Philoſophique ſur l'entendement humain.* Hoſtem utrumque naturæ humanæ infenſiſſimum impugnabimus in duobus articulis ſequentibus.

CAPUT I.

Utrùm natura cogitationis poſſit exponi per motum.

REvocentur in memoriam ea quæ circà naturam & proprietates motûs tradita fuerunt initio capitis 1 noſtri hujus Supplementi; hæc enim omnia ſunt quaſi totidem Principia quibus innitetur hic articulus.

PROPOSITIO UNICA.

Impoſſibile eſt exponere per motum naturam cogitationis.

Demonſtratur 1°. Motus reddere non poteſt materiam ex non cogitanti cogitantem; ergo impoſſibile eſt exponere

per motum naturam cogitationis. Prob. ant. Cogitatio neque est motus ipse, neque est effectus motûs; ergo &c. Prob. primam partem antec. Motus localis secum quatuor importat, nempè corpus quod movetur, seu mobile; duos terminos, videlicet terminum A à quo mobile venit, & terminum B in quem mobile tendit; actionem denique per quam mobile transfertur ex termino A in terminum B. Quibus præsuppositis, sic ratiocinor:

Cogitatio non est præcisè corpus quod movetur, prout corpus est, quia corpus illud non est semper cogitans.

Item cogitatio non est vel terminus à quo mobile venit, vel terminus in quem mobile tendit; nam ex ipsis Materialistis hi duo termini possunt supponi, & reverà sunt non cogitantes.

Denique cogitatio non est actio per quam mobile transfertur ex termino A in terminum B; hinc enim sequeretur quòd omnia corpora quæ per similem actionem transferrentur ex termino A in terminum B, fierent ex non cogitantibus cogitantia; falsum c̃quens, nam ipsi Materialistæ fatentur quòd saxum maximum per similem actionem ex termino A in terminum B translatum, non fieret ex non cogitanti cogitans; ergo dici non potest cogitationem esse motum ipsum.

Jam verò probatur altera pars ejusdem antecedentis, nempè cogitationem non esse effectum motûs.

Effectus habere debet quamdam cum causa sua proportionem & similitudinem; atqui cogitatio nullam habet proportionem & similitudinem cum motu; nam impossibile est Materialistis vel minimam assignare proportionem & similitudinem inter motum & apprehensionem, judicium, discursum, dubium &c; ergo cogitatio non est effectus motûs.

Præterea substantia cogitans est substantia activa, sed si materia fieret per motum ex non cogitanti cogitans, substantia cogitans non foret substantia activa; nam materia, cùm sit essentialiter iners, seipsam movere non potest; ergo materia non potest fieri per motum ex non cogitanti cogitans.

Demonſtratur 2°. Certus quidam atomorum numerus in corpore meo poſitus fieri non poteſt per motum ex non cogitanti cogitans; ergo impoſſibile eſt exponere per motum naturam cogitationis. Prob. ant. Illæ atomi in corpore meo remanent; ergo certus quidam atomorum numerus in corpore meo poſitus fieri non poteſt per motum ex non cogitanti cogitans. Prob. quam. Cogitatio ſibi repræſentat objecta remotiſſima, fertur in res longinquas, in mare, in cœlum &c. Item cogitatio fertur in res futuras, redit in res præteritas &c; ergo ſi atomi in corpore meo remaneant, fieri non poſſunt per motum ex non cogitantibus cogitantes, nam motus agere non poteſt in objecta abſentia.

Demonſtratur 3°. Suppono animam hominis conſtare 50 atomis tali motu donatis. Quo ſuppoſito ſic Materialiſtas urgeo.

Si cogitatio reſideat in omnibus atomis ſimul ſumptis, debet & reſidere in ſingulis atomis ſeorſim ſpectatis; quis enim concipere poſſit *Totum* aliquod cogitans, quin cogitatio in partibus ejus reſideat; atqui cogitatio reſidere non poteſt in ſingulis atomis ſeorſim ſpectatis; ergo nec reſidere poteſt in omnibus atomis ſimul ſumptis. Prob. min. ſi cogitatio reſideat in ſingulis atomis ſeorſim ſpectatis, comparanda eſſet anima hominis diſcordi reipublicæ inſanis ardenti ſeditionibus; accideret enim, vel ſaltem accidere poſſet quòd, dum affirmaret atomus A Petrum eſſe doctum, idem omninò negaret atomus B; ergo cogitatio reſidere non poteſt in ſingulis atomis ſeorſim ſpectatis.

Reſpondent Materialiſtæ inter illas 50 atomos unam eſſe ſelectam quæ princeps, reginaque ſedet, & ad quam cunctæ aliæ referuntur.

Verùm ſic iterum Materialiſtas urgeo. Vel atomus regina eſt alterius naturæ ac aliæ atomi, vel eſt ejuſdem naturæ. Si primum, ergo atomus regina non eſt materia; ſi ſecundùm ergo aliæ atomi tàm cogitant, quàm atomus regina.

Præterea conſtat partibus atomus regina, ac proindè propoſitam difficultatem non ſolvit materialiſtarum reſpon-

ſio; quod enim dicitur de 50 atomis animam hominis componentibus, idem omninò dicetur de 50 partibus quæ numerantur in atomo reginâ; ergo vel ſunt in dubium revocandæ demonſtrationes omnes à ratione ductæ, vel aſſerendum eſt per motum exponi non poſſe naturam cogitationis.

Solvuntur argumenta oppoſita.

Obj. 1. cum Hobbeſio. Senſatio eſt vera animæ cognitio, ſed ſenſatio poteſt exponi per motum; ergo aliqua animæ cognitio poteſt exponi per motum. Prob. min. explicatione ipſiuſmet Hobbeſii. Quid eſt ſenſatio? objectum externum, *reſpondet Hobbeſius*, percutit atque comprimit partem exteriorem organi, oculorum, *v. g.*, vel aurium. Propter communicationem quæ reperitur inter partem exteriorem organi & partes interiores cerebri, percuſſionem atque compreſſionem neceſſariò patitur cerebrum. Denique per illam percuſſionem atque compreſſionem efformatur in cerebro phantaſma, ſeu imago & repræſentatio objecti externi. Quâ explicatione ſuppoſitâ, ſic argumentatur Hobbeſius.

Senſatio nihil eſt aliud quàm imago efformata in cerebro per percuſſionem atque compreſſionem; ergo ſenſatio poteſt exponi per motum.

Reſp. ad 1. conc. maj. & neg. min. ad 2. diſt. ant. Senſatio, ſumpta in occaſione, nihil eſt aliud quàm imago efformata in cerebro per percuſſionem atque compreſſionem, conc. ant. Senſatio ſumpta in ſeipſa, & prout eſt actus animæ, neg. ant. & c̃quam. Deus bone, quàm multæ ſunt ineptiæ, quàm multa verba ſenſu vacua in hac hobbeſiana explicatione! Et verò nonne ſuas habet dimenſiones, ſuam nempè longitudinem, latitudinem & profunditatem quælibet imago efformata in cerebro? Jam verò quæro à vobis; quænam ſunt dimenſiones ſenſationum quæ vocantur dolor, ſapor, odor, ſonus? Nonne tantum eſt diſcrimen ſenſationem inter & imaginem efformatam vel in retina, vel in cerebro, quantum eſt inter gladium varias corporis partes dividentem & dolorem ab illo productum? Senſatio

ſumpta

ſumpta in ſeipſa & prout eſt actus animæ, nihil eſt aliud quàm cognitio objecti ſenſibilis quæ elicitur ad occaſionem alicujus impreſſionis in organis corporis factæ.

Inſt. 1°. Materia capax eſt illius cognitionis quæ vocatur *viſio*, nam oculus videt; ſed viſio poteſt exponi per motum; ergo materia capax eſt alicujus cognitionis quæ poteſt exponi per motum.

Reſp. ad 1. neg. maj. & diſt. min. Viſio ſumpta in occaſione, ſeu in imagine corporea objecti depicta in retina, poteſt exponi per motum, conc. min. Viſio ſumpta in ſeipſa, & prout eſt actus animæ, oculorum ope, cognoſcentis objecta colorata, poteſt exponi per motum, neg. min. & æquam. Non oculus videt, ſed anima, ad occaſionem impreſſionis in oculo factæ, videre dicenda eſt. Pariter non auris verba loquentum, at anima quæ præſidet auribus, audit.

Idem dicito de dolore. Dolorem non ſentiunt pedes, renes & caput; ſed ad occaſionem impreſſionis factæ in pedibus, renibus aut capite dolorem anima ſentit. *Dolet artubus ægris addita anima*, inquit Author Antilucretii.

Inſt. 2°. Saltem ſenſationes internæ poſſunt exponi per motum, ergo remanet eadem difficultas. Prob. ant. Actus per quem recordamur rei præteritæ, poteſt exponi per motum; nam memoria rectè admodùm explicatur per quædam objectorum priùs cognitorum veſtigia in cerebro impreſſa, & per motum ſpirituum vitalium intrà hæc eadem veſtigia decurrentium; ergo ſenſationes internæ poſſunt exponi per motum.

Reſp. ad 1. 2. & 3 neg. ant. Memoria in homine eſt facultas animæ rationalis per quam rerum priùs à nobis cognitarum recordamur. Fateor equidem ad hujus-modi recordationem neceſſaria eſſe veſtigia in cerebro impreſſa; fateor etiam neceſſarium eſſe motum ſpirituum vitalium intrà hæc veſtigia decurrentium; verùm hæc omnia ſunt conditiones ſine quibus anima non recordaretur rerum priùs cognitarum, non verò facultas animæ quæ vocatur *Memoria*.

Idem dicito de Phantasia, seu vi imaginandi, quæ facultas est quâ mens humana res corporeas sub imaginibus corporeis vividè percipit. Se habent per modum conditionum imagines in cerebro depictæ, & motus spirituum vitalium intrà imagines illas decurrentium.

Hinc sequitur sensationes hominis tum externas, tum internas, sumptas in seipsis, tàm spirituales esse, quàm apprehensiones, judicia & discursus.

Obj. 2°. Dantur cognitiones materiales, nam cognitio rei materialis est materialis; sed cognitiones materiales possunt exponi per motum: ergo quædam animæ cognitiones possunt exponi per motum.

Resp. ad 1. neg. maj. ad 2. dist. ant. Cognitio rei materialis sumpta, ut aiunt, *subjectivè*, seu in seipsa, est materialis, neg. ant. cognitio rei materialis sumpta objectivè, est materialis, conc. ant. & neg. c quam. Cognitio rei corporeæ, in seipsa spectata, tàm spiritualis est quàm cognitio rei spiritualis. Non potest equidem haberi cognitio rei materialis, nisi dependenter à corpore. Sed quid indè? Non est corpus principium elicitivum hujusmodi cognitionum, sed est mera tantùm conditio sine qua non cognoscerentur objecta materialia. Hoc unum igitur indè potest inferri, dari scilicet Animam inter & corpus unionem arctissimam, non autem unam eamdemque esse Animæ & corpori naturam.

Inst. Dari debet quædam proportio cognitionem inter & rem cognitam; ergo cognitio rei materialis est materialis, etiam *entitativè*.

Resp. dist. ant. Dari debet quædam proportio cognitionem inter & rem cognitam, hoc est, dari debet quædam similitudo naturæ cognitionem inter & rem cognitam, neg. ant. hoc est, dari debet quædam relatio cognitionem inter & rem cognitam, conc. ant. & neg. c quam. Ex hoc argumento sequeretur materiales & corporeas esse Dei cognitiones; Deus enim objecta materialia cognoscit.

Obj. 3°. Ex tribus demonstrationibus quæ fuerunt contra Materialistas allatæ, tertia videtur esse falsa; quod sic

probatur. Supponit hæc demonſtratio quòd proprietates quæ conveniunt collectioni, debeant & convenire partibus; aſſeritur enim in illa demonſtratione quòd atomus quælibet cogitare debeat, ex eo quòd ſit cogitans atomorum collectio ex quibus anima conſtat; ergo ex tribus demonſtrationibus quæ fuerunt contra Materialiſtas allatæ, tertia videtur eſſe falſa.

Reſp. ad 1. & 2. neg. ant. ad 3. diſt. ant. Aſſeritur in tertia demonſtratione quòd atomus quælibet cogitare debeat, ex eo quòd ſit cogitans atomorum collectio ex quibus anima conſtat; id, inquam, aſſeritur propter indiviſibilitatem cogitationis, conc. ant. id aſſeritur propter collectionem atomorum ex una parte, & propter diſtributionem earumdem atomorum ex altera parte, neg. ant. & c̃quam. Quis umquam concipiat quinquaginta atomos cogitationem indiviſibilem producere, quin cogitatio reſideat in ſingulis atomis diſtributivè ſumptis?

ARTICULUS II.

Utrum demonſtrari poſſit materiam eſſe cogitandi incapacem, etiam de potentia Dei abſoluta?

1°. POtentia activa, in genere ſpectata, nihil eſt aliud quàm capacitas effectum aliquem producendi.

2°. Potentia activa, alia naturalis eſt, ſupernaturalis ſeu *obedientialis* alia. Illa producit effectus naturales, & virtuti Potentiæ proportionatos; hæc autem attingit effectus ſupernaturales, ſeu ſuprà naturæ vires poſitos.

3°. Potentia *obedientialis* activa ſpectari poteſt vel ratione ſui, vel ratione complementi quo indiget ad producendos ſupernaturales effectus. Potentia obedientialis activa, ſumpta ratione ſui, non diſtinguitur realiter ab eſſentia creaturæ; nihil enim eſt aliud quàm eſſentialis dependentia à Deo, creaturis ſuis identidem utente ad virtutem ſuam infinitam manifeſtandam. Potentia obedientialis, ſumpta ratione complementi, diſtinguitur realiter ab

essentia creaturæ; nihil enim est aliud complementum hujusmodi quàm auxilium supernaturale quo Deus creaturæ suæ potentiam obedientialem elevat, illamque capacem reddit producendi effectus naturâ suâ superiores.

4°. Duplex est Philosophorum sententia circà Potentiam obedientialem activam creaturarum. Alii ità eam exagerant, ut in quolibet ente dari existiment potentiam obedientialem ad quemlibet effectum producendum. Alii verò sentiunt potentiam obedientialem arctioribus esse circumscribendam terminis. Juxtà illos, elevabilis dumtaxat est hæc potentia ad producendos effectus quibuscum videtur aliquam habere proportionem, seu ad quos vim habet aliquam inchoatam.

Cùm autem ab illis quæritur quomodo cognosci possit creaturam habere vim aliquam inchoatam ad effectum aliquem supernaturalem producendum; respondent statim defensores hujus sententiæ id cognosci quando creatura potest attingere cum suis conprincipiis naturalibus effectum supernaturalem secundùm genus illius proximùm, seu clariùs, quando creatura producere potest effectum aliquem naturalem qui habeat idem genus proximum, ac effectus supernaturalis ad cujus productionem elevabilis est. Rem hanc totam illustrant exemplo sequenti. Voluntas humana, *inquiunt illi*, elevari potest ad producendum actum aliquem charitatis supernaturalem, quia scilicet voluntas illa, concursu Dei ordinario adjuta, potest actum aliquem charitatis naturalem producere. Porrò actui charitatis naturali & actui charitatis supernaturali idem est genus proximum; ergo voluntas humana vim habet inchoatam ad producendum actum aliquem supernaturalem charitatis.

5°. Hìc non est discutiendi locus utrùm admittenda sit in creaturis potentia obedientialis activa ad omnes omninò, vel ad certos tantùm effectus suprà naturæ vires constitutos. Hoc unum annotabimus quòd scilicet affirmari possit in creaturis existere potentiam obedientialem activam ad omnes omninò effectus, quin indè liceat inferri materiam esse, de potentia Dei absoluta, cogitandi capacem

Et verò asserfores hujus sententiæ neque admittunt, neque intendunt admittere potentiam obedientialem ad verificanda duo prædicata contradictoria; sed qui contendunt materiam esse, de potentia Dei absoluta, cogitandi capacem, hi admittunt potentiam obedientialem ad verificanda duo prædicata contradictoria, ut probabitur inferiùs; ergo qui admittunt in creaturis potentiam obedientialem activam ad omnes omninò effectus, hi non admittunt potentiam obedientialem in materia ad cogitandum.

6°. Duplici modo demonstrari potest materiam esse, etiam de potentia Dei absoluta, cogitandi incapacem, *ab intrinseco* scilicet & *ab extrinseco*. Demonstrabitur *ab intrinseco* materiam esse cogitandi incapacem, si demonstretur essentiam materiæ esse cum essentia spiritûs prorsùs incompossibilem. Demonstrabitur *ab extrinseco* materiam esse cogitandi incapacem, si demonstretur vel ethnicos ipsos qui vocari solent Materialistæ, alienos à materialismo fuisse. Sit itaque.

PROPOSITIO PRIOR.

Demonstrari potest *ab intrinseco* materiam esse cogitandi incapacem.

Demonstratur 1°. Si materia cogitare potest, vel id potest prout est materia præcisè, vel prout importat certum quemdam ordinem, certam quamdam combinationem atque unionem. Sed neutrum dici potest. Ac primò quidem, si materia, prout est materia præcisè, capax esset cogitandi, sequeretur quòd in homine non solùm caput, sed & manus & pedes essent cogitandi capaces, ac proindè sequeretur quòd in homine possent esse mentes innumeræ; tot enim in homine possent esse animæ, quot sunt particulæ materiæ: item sequeretur quòd arbores, saxa, uno verbo, corpora omnia vel fœdissima atque crassissima eximios mentis honores possent per sese postulare; hæc enim omnia corpora essentiam habent materiæ; falsum ex ipsis Materialistis est; ergo &c. ant.

Neque etiam materia cogitare potest prout importat

certum quemdam ordinem, certam quamdam combinationem & unionem. Si enim oriretur cogitatio ex tali combinatione & mixtura partium materiæ, sequeretur quòd cogitatio foret effectus motûs; falsum ex dictis in articulo præcedenti c̃quens, ergo & ant.

Demonstratur 2°. ex absurdis quæ sequuntur evidenter ex hoc inepto & impio systemate.

Absurdum 1. Si combinatio & mixtura partium materiæ producant animam, ubi anima non erat, sequitur quòd producatur anima eo prorsus modo quo fit cubus, aut pyramis, aut cylindrus; nam omnes illæ figuræ fiunt per combinationem & mixturam partium materiæ; absurdum c̃quens, ergo & ant.

Absurdum 2. Si materia, prout importans talem figuram, sit cogitandi capax, sequitur quòd animæ tribui possint proprietates figuræ, & vicissim figuræ tribui possint proprietates animæ, falsum c̃quens; nam anima dici non potest rotunda, triangularis aut cylindrica; item nulla est figura quæ dici possit docta vel ignara, justa vel injusta, prudens vel incauta, modesta vel superba; ergo neque animæ tribui possunt proprietates figuræ, neque figuræ tribui possunt proprietates animæ.

Demonstratur 3°. Substantia cogitans est substantia capax volendi, nolendi, discurrendi &c.; sed substantia capax operationum hujusmodi non est materia; ergo substantia cogitans non est materia. Prob. min. Substantia capax volendi, nolendi, discurrendi &c. est substantia libera; sed substantia libera non est materia; ergo substantia capax volendi, nolendi, discurrendi &c. non est materia. Prob. min. Operationes materiæ non sunt liberæ; habent enim pro causa motum & leges motûs, & materia, essentialiter iners & passiva, seipsam movere non potest, ut superius demonstravimus; ergo substantia libera non est materia.

Confirmatur. Illud systema est evidenter falsum ex quo sequuntur evidenter impiissimæ consequentiæ; atqui ex systemate materialistarum sequuntur evidenter impiissimæ consequentiæ; hæc enim sequuntur evidenter ex tali systemate:

1°. Anima hominis perit cum ipsius corpore, ac proindè nulla datur in altera vita virtuti merces, nulla vitio pœna.

2°. Anima hominis non est libera, ac proindè nulla datur virtutem inter & vitium distinctio.

3°. Æquè laudandus est qui amicum, benefactorem, fratrem, matrem aut patrem interficit, ac is qui hosti patriæ infensissimo mortem infert justissimam; ergo ex inepto materialistarum systemate sequuntur evidenter impiissimæ consequentiæ.

Solvuntur argumenta opposita.

Obj. 1°, *cum Lockio.* Non demonstratur materiam esse cogitandi incapacem; ergo forsan materia cogitare potest. Prob. ant. Ut demonstrari posset materiam esse cogitandi incapacem, deberent nobis esse perspectæ omnes omninò materiæ proprietates; atqui nobis perspectæ non sunt omnes materiæ proprietates; ergo demonstrari non potest materiam esse cogitandi incapacem.

Resp. ad 1. neg. ant. ad 2. neg. maj. Ut demonstrari possit materiam esse cogitandi incapacem, nobis debet esse perspectum cogitationem esse prorsùs incompossibilem cum illis materiæ proprietatibus quas cognoscimus; atqui perspectum nobis est cogitationem esse prorsùs incompossibilem cum illis materiæ proprietatibus quas cognoscimus. Et verò perspectum nobis est materiam esse dumtaxat capacem figuræ, motûs, quietis & combinationis partium; & cognovimus insuper neque per figuram, neque per motum, neque per quietem, neque per combinationem partium materiam cogitationis exponi posse. Item cognovimus materiam esse extensam & divisibilem, & insuper perspectum nobis est cogitationem, ut potè indivisibilem, recipi non posse in subjecto extenso & divisibili. Denique cognovimus materiam esse essentialiter inertem & passivam, & insuper perspectum nobis est essentialiter activam esse substantiam cogitantem; ergo perspectum nobis est cogitationem esse prorsùs incompossibilem cum illis materiæ proprietatibus

quas cognoſcimus ; ergo falſum eſt quòd, ut demonſtretur materiam eſſe cogitandi incapacem, nobis debeant eſſe perſpectæ omnes omninò materiæ proprietates.

Quod dicitur de demonſtratione præſenti, hoc & dicetur de omnibus omninò quæ paſſim afferuntur demonſtrationibus. Non cognoſcuntur à Geometris omnes circuli proprietates, illi tamen affirmant intrepidè circulum non eſſe quadratum. Prorsùs ignorant Phyſici quænam ſit genuina virtutis magneticæ cauſa ; illi tamen aſſerunt abſque formidine magnetem non eſſe animal. Nullius eſt igitur ponderis authoritas Lockii ſomniantis aliquam eſſe forſan in materia proprietatem, nobis hactenus incognitam, quam Deus poterit ad cogitandum elevare.

Præterea ſibimetipſi non ſemel in opere ſuo contradicit Lockius. Et verò ſic loquitur *lib. 4. cap. 3. parag. 6.* (Je ne vois pas quelle contradiction il y a que Dieu, cet Etre penſant, éternel & tout puiſſant, donne, s'il veut, quelques dégrés de ſentiment, de perception & de penſée à certains amas de matiere créée & inſenſible, qu'il joint enſemble, comme il le trouve à propos).

Jam verò audiamus eumdem Lockium lib. 4. cap. 10. parag. 3. (Le pur néant ne peut non plus produire un être réel, que le même néant peut être égal à deux angles droits).

Tandem audiamus eumdem Authorem *lib. 4. cap. 10. parag. 10.* (Il ſera toujours autant au-deſſus des forces du mouvement & de la matiere de produire de la connoiſſance, qu'il eſt au-deſſus des forces du néant de produire de la matiere).

Quibus præſuppoſitis, ſic brevem contra Lockium conficio demonſtrationem. Ex ipſo Lockio, tàm impoſſibile eſt materiam producere cogitationem, quàm impoſſibile eſt nihilum producere materiam ; ſed impoſſibile eſt, etiamſi Deus ſuam omnipotentiam adhibeat, quòd nihilum producat materiam ; nihilum enim non poteſt eſſe rei alicujus cauſa phyſica ; ergo impoſſibile eſt, etiamſi Deus ſuam omnipotentiam adhibeat, quòd materia producat cogitationem ; ergo ſibimetipſi Lockius contradicit, cùm

audacter afferit nullam esse contradictionem quòd Deus, de potentia sua absoluta, reddat materiam sentiendi & cogitandi capacem.

Valeat ergo authoritas Lockii quam tantoperè Materialistæ jactitant; valeat etiam ipsius & periculosum & fastidiosum opus; valeant denique illi omnes qui Lockii sententiam sequi gloriantur.

Neque dicas Deum esse omnipotentem; Dei enim omnipotentia non se extendit ad chimeram.

Inst. 1°. Sunt Physici non exigui nominis qui admittunt atomos materiales, simplices & indivisibiles. Quo supposito, sic argumentor: cogitatio recipi potest in atomis hujuscemodi; nam operatio indivisibilis recipi potest in subjecto indivisibili; ergo est aliqua materia quam Deus, potentiam suam absolutam adhibens, elevare poterit ad cogitandum.

Resp. admisso supposito, de cujus veritate vel falsitate disputare inane prorsùs esset, ad 1. *neg. ant. ad* 2. *dist. ant.* Operatio indivisibilis recipi potest in subjecto indivisibili, si utrumque supponatur inextensum, conc. ant. Si ex duobus alterum sit inextensum, & alterum extensum, neg. ant. & æquam. Cogitatio est indivisibilis & inextensa; atomi verò de quibus hìc agitur, divisibiles sunt & extensæ.

Nunc autem audi quàm multa absurda congerant materialistæ atomorum indivisibilium & extensarum defensores. Atomus A, *inquiunt*, partem habet inferiorem & partem superiorem. Duæ ideæ recipi non possunt in una eademque parte atomi; una igitur idea recipitur in parte inferiori, & altera in parte superiori. Cùm autem judicium quodcumque geminam supponat ideam, tum Atomus A judicat, cùm comparat ideam quæ recipitur in parte inferiori cum idea in parte superiori recepta. Hactenus materialistæ: risu potiùs, quàm seriis rationibus confutandæ sunt hujusce modi nugæ.

Præterea atomus, etiam simplex & indivisibilis, iners est & passiva; activa autem est substantia cogitans; ergo elevari non potest ad cogitandum atomus simplex & indivisibilis.

Inst. 2°. Duæ modificationes oppositæ possunt esse in

uno, eodemque ſubjecto; ergo extenſio & cogitatio, quæ ſunt modificationes oppoſitæ, poſſunt eſſe in una, eademque materia. Prob. ant. color & figura ſunt modificationes oppoſitæ, nam opponuntur inter ſe modificationes diverſæ ſpeciei; ſed color & figura poſſunt eſſe in uno, eodemque ſubjecto; ergo duæ modificationes oppoſitæ poſſunt eſſe in uno, eodemque ſubjecto.

Reſp. ad 1. neg. ant. ad 2. neg. maj. ad 3. diſt. ant. Opponuntur inter ſe modificationes diverſæ ſpeciei, ſi una includat in ſuo conceptu excluſionem alterius, conc. ant. Opponuntur inter ſe, ex eo præcisè quòd ſunt ſpeciei diverſæ, neg. ant. & c̃quam. Ratiocinia & ſenſationes ſunt ſpeciei diverſæ, quis tamen dixerit operationes illas eſſe inter ſe oppoſitas? Contrà verò affirmatio & negatio *de eodem ſecundùm idem*, opponuntur inter ſe, non præcisè quia ſunt ſpeciei diverſæ, ſed quia una includit in ſuo conceptu formali excluſionem alterius; nemo enim poteſt rem eamdem, ſub eodem reſpectu conſideratam, eodem tempore affirmare & negare.

Obj. 2°. Illa ſententia eſt admittenda quæ tribuit Deo majus in creaturas dominium; atqui ſententia admittens Deum elevare poſſe materiam ad cogitandum, tribuit Deo majus in creaturas dominium; ergo talis ſententia admittenda eſt.

Reſp. diſt. maj. Illa ſententia eſt admittenda quæ tribuit Deo majus in creaturas dominium, dominium, inquam, verum & reale, conc. maj. dominium chimericum, neg. maj. & ſic diſtinctâ minore, neg. c̃quam. Chimericum eſt aſſerere ens aliquod eſſentialiter iners, paſſivum & diviſibile poſſe eſſe cauſam phyſicam cogitationis indiviſibilis.

Inſt. 1°. Quælibet creatura vim habet inchoatam producendi quemlibet effectum; ergo materia vim habet inchoatam producendi cogitationem, & conſequenter chimericum non eſt aſſerere materiam, de potentia Dei abſoluta, fieri poſſe ex non cogitanti cogitantem. Prob. ant. Quælibet creatura præcontinet genus cujuſcumque effectûs, nam quælibet creatura præcontinet ens; ergo quælibet creatura vim habet inchoatam producendi quemlibet effectum.

Resp. ad 1. neg. ant. ad 2. dist. ant. Quælibet creatura præcontinet genus remotum cujuscumque effectûs, conc. ant. genus proximum & ultimum cujuscumque effectûs, neg. ant. & c̄quam. Logica docet ens esse dumtaxat genus remotum cujuscumque effectûs. Vide quæ hac de re diximus initio hujus articuli, *num. 4.*

Inst. 2°. Creatura vim habet inchoatam ad creandum ens aliquod; ergo quælibet creatura vim habet inchoatam producendi quemlibet effectum. Prob. ant. creare, est facere aliquid tum ex nihilo suî, tum ex nihilo subjecti; ergo creatura vim habet inchoatam ad creandum ens aliquod. Prob. c̄quam. Creaturæ possunt facere aliquid ex nihilo suî, sed non ex nihilo subjecti; ergo si creare, est facere aliquid tum ex nihilo suî, tum ex nihilo subjecti, creatura vim habet inchoatam ad creandum ens aliquod.

Resp. ad 1. neg. ant. ad 2. dist. ant. Creare, est facere aliquid tum ex nihilo suî, tum ex nihilo subjecti, cum summa independentia à quocumque alio, conc. ant. creare, est præcisè facere aliquid ex nihilo suî, & ex nihilo subjecti, neg. ant. & c̄quam. Non magis creatura potest aliam creaturam creare, quàm seipsam; creatio enim est modus agendi Deo proprius & singularis.

Obj. 3°. Si Philosophi christiani sibi-ipsis constare velint, illis necessariò fatendum est Deum, potentiam suam absoluram adhibendo, elevare posse materiam ad cogitandum; quod sic probatur: Deus, *inquiunt Philosophi christiani*, elevavit asinam prophetæ Balaam ad ratiocinandum, eo prorsùs modo quo ratiocinantur homines; ergo *à pari* Deus elevare potest materiam ad cogitandum. Prob. ant. *sic legitur cap.* 22. *Num.* (. Cùm vidisset asina stantem angelum, concidit sub pedibus sedentis, qui iratus vehementer cædebat fuste latera ejus. Aperuit Dominus os asinæ & locuta est: quid feci tibi? Cur percutis me? ecce jam tertiò? Respondit Balaam, quia commeruisti..... utinam haberem gladium ut te percuterem. Dixit asina, nonne animal tuum sum, cui semper sedere consueviſti usque in præsentem diem? Dic quid simile umquam fe-

cerim tibi &c.) Quo ſuppoſito, ſic argumentor : ſic loqui, eſt ratiocinari eodem prorsùs modo quo ratiocinantur homines; ſed aſina prophetæ Balaam ſic locuta eſt; ergo aſina prophetæ Balaam eodem prorsùs modo ratiocinata eſt, quo ratiocinantur homines.

Reſp. ad 1. & 2. neg. ant. ad 3. diſt. maj. Sic loqui, eſt ratiocinari, ſi ſupponantur aſinam prophetæ Balaam percepiſſe vim verborum quæ proferebat, conc. maj. Si id non ſupponatur, neg. maj. Sed aſina prophetæ Balaam ſic locuta eſt, percipiendo vim verborum quæ proferebat, neg. min. non percipiendo, conc. min. & neg. cõquam. Aſina prophetæ Balaam per miraculum ſonos quoſdam articulatos protulit, qui, ſi fuiſſent ab homine prolati, creaturam ratiocinantem denotaſſent. Porrò vim inchoatam habebat hæc aſina ad ſonos hujuſmodi proferendos; materia autem vim inchoatam non habet ad cogitandum.

Inſt. Docent Philoſophi chriſtiani Deum elevare poſſe ignem ad refrigerandum; illi enim narrant tres pueros qui juſſu regis Nabuchodonoſoris miſſi ſunt in fornacem Babilonicam, fuiſſe refrigeratos ab igne; ergo & docere debent iidem Philoſophi Deum elevare poſſe materiam ad cogitandum.

Reſp. 1°. ad 1. & 2. neg. ant. Narrant Philoſophi chriſtiani tres pueros hebræos non fuiſſe ab igne, ſed à zephiris refrigeratos. Sic enim legitur *Danielis cap. 3.* (Angelus autem Domini deſcendit cum Azaria & ſociis ejus in fornacem, & excuſſit flammam ignis de fornace, & fecit medium fornacis quaſi ventum roris flantem, & non tetigit eos omninò ignis, neque contriſtavit, neque quidquam moleſtiæ intulit).

Reſp. 2°. ad 1. conc. ant. & neg. cõquam & paritatem. Ignis vim habet inchoatam ad refrigerandum; ignis enim deſtitui poteſt motu ſuo in omnem ſenſum, & accipere motum quemdam leniorem qui refrigerium procreet. Contrà verò materia non habet vim inchoatam ad producendas cogitationes; nam materia cogitans foret ſubſtantia activa & non activa, extenſa & non extenſa, diviſibilis & non diviſibilis &c. ut evidenter apparebit iis omnibus qui noſtras

legerint demonſtrationes abſque præjudicatis opinionibus.

Hactenùs *ab intrinſeco* & ex idea materiæ demonſtravimus materiam eſſe, etiam de potentia Dei abſoluta, cogitandi incapacem. Jam verò, ut nullus adverſariis noſtris relinquatur effugiendi locus, demonſtrandum habemus *ab extrinſeco* materiam cogitare non poſſe, hoc eſt, demonſtrandum habemus vel etiam Philoſophos ethnicos alienos à materialiſmo fuiſſe. Sit itaque.

PROPOSITIO POSTERIOR.

Demonſtrari poteſt *ab extrinſeco* materiam eſſe cogitandi incapacem.

Demonſtratur. Philoſophi ethnici conſtanter aſſeruerunt ſubſtantiam cogitantem, qualis eſt anima hominis, neque eſſe materiam, neque eſſe materialem; quod probatur enumeratione ſequenti.

1°. Legantur attentè tres libri quos de anima ſcripſit Ariſtoteles, & apparebit quàm alienus à materialiſmo fuerit Philoſophorum Princeps. Sic loquitur *lib. 2. de anima, cap. 2. Anima verò eſt id quo vivimus, & ſentimus & intelligimus primò; quò circà eſt ratio quædam & forma, non ut materia & ſubjectum.*

2°. Invictiſſimis argumentis probat divinus Plato in totò dialogo qui inſcribitur *Phædo*, ſeu *de Anima*, animam hominis immaterialem eſſe. Hinc familiare erat Platonicis animam appellare id quod eſt *non corpus, non materia.*

3°. Pythagoras & Pythagorei, *inquit Cicero lib. de ſenectute*, numquam dubitarunt quin ex univerſa mente divina delibatos animos haberemus.

4°. Cicero in operibus ſuis philoſophicis, nempè *lib. 1. tuſculanarum quæſtionum ſic loquitur :* (in animi autem cognitione dubitare non poſſumus, niſi planè in phyſicis plumbei ſumus, quin nihil ſit animis admixtum, nihil concretum, nihil copulatum, nihil coagmentatum, nihil duplex. Quod cùm ita ſit, certè nec ſecerni, nec dividi nec diſcerpi, nec diſtrahi poteſt, nec interire igitur. Eſt enim interitus quaſi diſceſſus & ſecretió, ac diremtus earum partium quæ ante interitum junctione aliquâ tenebantur).

Item lib. de senectute. (Sic mihi persuasi, sic sentio, cùm tanta celeritas sit animorum, tanta memoria præteritorum, futurorum prudentia, tot artes, tot scientiæ, tot inventa, non posse illam naturam quæ res illas contineat, esse mortalem; cùmque semper agitetur animus, nec principium motûs habeat, quia ipse se moveat, ne finem quidem habiturum esse motûs, quia numquam seipse sit relicturus; & cùm simplex animi sit natura, neque habeat in se quidquam admixtum dispar sui atque dissimile, non posse illum dividi; quod si non possit, non posse interire.

Dices 1°. Inter Philosophos ethnicos alii voluerunt animam hominis esse quemdam ignem, alii subtilissimum aerem, alii flammulam solis &c.; iis enim verbis utuntur, quando de anima hominis sermonem habent; ergo Philosophi ethnici asseruerunt animam hominis puram esse materiam.

Resp. neg. ant. Plerique Philosophi ethnici contendebant duobus corporibus uniri animam hominis, alteri crassiori, subtiliori alteri. De corpore crassiori, seu de carcere nostro volebant animam à morte liberari; corpus autem subtilius, seu igneum & æthereum, animam numquam deserere putabant, ideòque illud animæ nostræ currum appellabant. Hinc patet Philosophos ethnicos qui nobis objiciuntur, non de anima, sed de curru illius sermonem habuisse, cùm illam comparârunt nunc cum ignea materia, nunc cum aere subtiliori, nunc cum flammula solis.

Dices 2°. Saltem Epicurei docuerunt animam hominis esse materialem & corpoream; ergo non omnes Philosophi ethnici docuerunt animæ rationalis spiritualitatem.

Resp. dist. ant. Epicurei carnales, seu porci de grege Epicuri, qui totam hominis felicitatem in voluptatibus positam esse volebant, docuerunt animam hominis esse materialem & corpoream, conc. ant. id docuerunt Epicurei spirituales, neg. ant. & quam. Neque Epicurus, neque veri ipsius discipuli, si fides adhibeatur Plutarcho, umquam docuerunt materialem & corpoream esse Animam hominis; ergo tum *ab intrinseco*, tum *ab extrinseco* demonstratur materiam prorsùs esse cogitandi incapacem.

LES BÊTES ANTI-MACHINES

OU

L'impoſſibilité d'expliquer la nature de leurs connoiſſances par les loix de la Mécanique.

LEs Bêtes, *diſent les Matérialiſtes*, ont des connoiſſances auſſi réelles, que leurs ſenſations ſont véritables; ce ſont là cependant de pures machines; la matiere n'eſt pas donc eſſentiellement & radicalement incapable de devenir un *être ſentant & connoiſſant*, & par-là même un être *penſant*.

Voilà le grand argument de nos Philoſophes modernes. Mais qu'il eſt foible ce prétendu raiſonnement! Il eſt auſſi impoſſible d'expliquer par les loix de la Mécanique la nature des connoiſſances des bêtes, que la nature de la penſée de l'homme. Deſcartes, je le ſais, regardoit les bêtes comme de pures machines, comme de purs automates; mais ce Philoſophe conſéquent, même dans ſes erreurs, leur refuſoit toute eſpece de connoiſſances & de ſenſations. Pour nous, nous allons avancer & prouver les 5 propoſitions ſuivantes:

Les Bêtes ne ſont pas de pures machines.

Les Bêtes ont une ame véritable.

L'ame des Bêtes n'eſt ni matiere, ni matérielle.

L'ame des Bêtes n'eſt pas un eſprit.

L'ame des Bêtes, immatérielle de ſa nature, tient le milieu entre l'eſprit & la matiere.

APPENDIX II.

DE BESTIIS

SEU

De impossibilitate exponendi per leges Mecanicæ omnes omninò Bestiarum operationes.

AFfirmat intrepidè Carteſius (epiſt. liv. tom. 1. edit. in-12) Beſtias, omni omninò non ſolùm cognitione, ſed & ſenſatione deſtitutas, nihil aliud eſſe quàm pura automata, meraſque machinas, ac proindè illarum omnes operationes exponi poſſe per leges Mecanicæ, eo fermè modo quo per leges eaſdem exponuntur motus omnes horologii rotati. Totum hoc ſyſtema verſibus elegantiſſimis ſic proponit Emin. Card. de Polignac in Antilucretio.

Jam verò in brutis ſi dicas prorsùs ineſſe
Nil niſi corporeum, per me licet; at ſimul ipſis
Notities & amor, menſque omnis tollitur: una,
Mirè ſtructa quidem, verùm mera machina reſtat.
An mera, ſuccłamas, hæc edere machina poſſit,
Unde tibi ſtupor atque mihi, quòd pleraque vires
Humanæ exuperant mentis? Tu videris, orbi
Qui vacuo atque atomis nil das præſtantius; at nos
Qui Numen, rerum cauſas, artificemque fatemur,
Tutò affirmamus cuncta hæc ratione ſuprema
Confieri, atque feras regitur quâ mundus, eâdem
Mente regi, tales quæ concinnavit ad uſus
Automata; & tam clara ſui monumenta reliquit.
Mentem ergo in brutis propriam perquirere vanum eſt.
Arguit in fabro, non in ſe, machina mentem.

Quod ut falſum eſſe demonſtretur, ſit

PROPOSITIO

PROPOSITIO I.

Animalia bruta non ſunt puræ machinæ, meraque automata.

Demonſtratur 1°. Si animalia bruta eſſent mera automata, ſequeretur quòd omnes illorum motus exponi poſſent per leges Mecanicæ; falſum conſequens, ergo & ant. Prob. min. Plerique motus animalium legibus illis ſunt difformes; ergo &c. Prob. ant. enumeratione ſequenti. Innumeras autem inter Mecanicæ leges, duas dumtaxat ſeligamus, quarum exiſtentiam demonſtravimus in capite 2 noſtri hujus ſupplementi.

Corpus quod movetur; lineam rectam, quantùm ex ſe eſt, deſcribit:

Corpus quod movetur, tandiu movetur, donec per reſiſtentiam obviorum corporum, totum ſuum motum amiſerit.

Quibus legibus ſuppoſitis, ſic ratiocinor: animalia bruta non moventur potiùs per lineam rectam, quàm per lineam curvam. Item motus canis vel velociſſimus, continuò ſiſtitur per ſimplicem domini ſui vocem; ergo plerique motus brutorum animalium ſunt difformes Mecanicæ legibus.

Demonſtratur 2°. Aſſerere animalia bruta meras eſſe machinas, puraque automata, illud eſt evidenter difformè dictamini rectæ rationis, & intimo omnium hominum ſenſui; ergo animalia bruta neque ſunt meræ machinæ, neque automata pura. Prob. ant. Nullus eſt, etiam apud Barbaros, homo qui ſenſu quodam commiſerationis non afficiatur, cùm videt brutum quodcumque, canem, *v. g.*, dura patientem, aut cùm illum audit ejulantem; ergo difforme eſt dictamini rectæ rationis & intimo omnium hominum ſenſui aſſerere animalia bruta meras eſſe machinas, automataque pura; nam nemo ſanus compatitur horologio rotato caſu quodam imprudenti perfracto.

Reſpondebunt fortè Carteſiani ſenſum hunc commiſerationis ſuam à præjudicatis opinionibus originem ducere.

Verùm ſic iterum urgeo. Vel ipſi Carteſiani ſenſum hunc commiſerationis experiuntur; ergo ipſis perſuaſum non eſt

animalia bruta esse meras machinas, automataque pura,

Solvuntur argumenta opposita.

Obj. Nulla est in brutis operatio quæ non possit exponi per motum; ergo animalia bruta sunt automata mera, puræque machinæ. Prob. ant. Si qua daretur in brutis operatio quæ non posset exponi per motum, maximè sensationes illorum, visio nempè, auditus, memoria &c. atqui hæc omnia possunt exponi per motum; ergo &c. Prob. min. visio in cane, *v. g.*, nihil est aliud quàm imago materialis, depicta in retina canis per varios luminis radios qui emittuntur ab objectis, & qui post certum refractionum numerum uniuntur in eodem puncto retinæ; ergo &c.

Resp. ad 1. neg. ant. ad 2. conc. maj. & neg. min. ad 3. dist. ant. In cane visio, sumpta in occasione, nihil est aliud quàm imago depicta in retina canis, conc. ant. Sumpta in seipsa, & prout est actus animæ canis, neg. ant. & c̃quam. Canis, ad occasionem imaginis in retina sua depictæ, erumpit in actum objecti cognoscitivum qui numquam per motum exponetur; non distinguitur hic actus à sensatione propriè dicta, seu à visione sumpta in seipsa.

Inst. 1°. In brutis nutritio, alimentorum digestio distributio sanguinis per omnes corporis partes, discretio spirituum vitalium &c. hæc omnia possunt per motum exponi; ergo pariter per motum exponentur sensationes brutorum, etiam in seipsis spectatæ.

Resp. conc. ant. & nego c̃quam & paritatem. Ex digestione, nutritione &c. nullus motus exurgit in brutis qui sit contra Mecanicæ leges; contrà verò ex brutorum sensationibus multi sequuntur motus qui legibus illis sunt diametraliter oppositi.

Præterea digestio, nutritio &c. nullam in brutis cognitionem arguunt; contrà verò blanditiæ canis, timor ejus ad increpationem domini sui, & operationes innumeræ quæ sequuntur ex brutorum sensationibus, manifestè demonstrant brutis inesse Principium aliquod sentiens & cognoscitivum.

Inſt. 2°. Motus omnes quibus viget orbis hic univerſus, ſpectaculum præſtantius oculis noſtris exhibent quàm operationes omnes brutorum animalium, & tamen exponuntur motus hujuſcemodi per principia purè mecanica; ergo pariter per eadem omninò principia poterunt exponi operationes omnes brutorum animalium.

Reſp. omitto antec. & neg. c̃quam & paritatem. Ex motibus quibus viget orbis hic univerſus, nullus umquam aſſignabitur qui pugnet cum legibus Mecanicæ quas naturæ hujus Author ſapienter inſtituit; contrà verò non una eſt in brutis operatio quæ ſit legibus iiſdem diametraliter oppoſita.

Inſt. 3°. Motus omnes poſſunt exponi per principia purè mecanica; ſed nihil ſunt aliud operationes brutorum, quàm motus; nam nihil in brutis percipimus ope ſenſuum niſi motus; ergo per principia purè mecanica poſſunt exponi brutorum operationes.

Reſp. ad 1. *conc. maj. & neg. min. ad* 2. *diſt. ant.* Nihil in brutis percipimus ope ſenſuum niſi motus, & ex multis illorum motibus concludimus intrepidè dari in brutis principium aliquod cognoſcitivum, conc. ant. ſecùs neg. ant. & c̃quam. Si valeret argumentum illud, nihil aliud eſſet homo quàm machina pura; nihil enim niſi motus locales in homine percipimus ope ſenſuum.

Inſt. 4°. Ex dictis ſequitur impoſſibile eſſe impoſſibilitate metaphyſica obtinere à pura machina & à pura materia eas omnes operationes quæ eliciuntur à brutis; falſum c̃quens, nam temerarium eſſet arctos adeò limites omnipotentiæ Dei conſtituere; ergo & ant.

Reſp. diſt. ſeq. Ex dictis ſequitur impoſſibile eſſe impoſſibilitate metaphyſica obtinere à pura machina & à pura materia eas omnes operationes internas quæ eliciuntur à brutis, conc. ſeq. externas, neg. ſeq. & ſic diſtinctâ minore, neg. c̃quam. Operationes internæ brutorum animalium eliciuntur immediatè ab ipſorum anima conſequenter ad quaſdam impreſſiones & percuſſiones quæ fiunt in organis illorum corporeis. Impoſſibile eſt omnipotentiæ divinæ operationes hujuſmodi obtinere à pura machina & à pura

materia ; Deus enim non magis elevare poteſt materiam ad cognoſcendum & ſentiendum quàm rerum eſſentias immutare.

Inſt. 5°. Potuit artifex celeberrimus (D. Vaucanſon) ſtatuam ità affabrè factam elaborare, ut tibiam ad harmoniam muſicæ pertractaret ; ergo *à fortiori* Deus poteſt obtinere à pura machina & à pura materia omnes omninò operationes brutorum animalium.

Reſp. conc. ant. & neg. æquam & paritatem. In ſtatua artificis ſuprà laudati nulla elucet cognitio ; bruta autem animalia nobis ſexcenta præbent ſigna cognitionis.

Hoc idem omninò reſpondebitur, ubi objicietur Anas mentita artificis ejuſdem, quæ roſtro graha colligebat, illa per æſophagum in ſtomachum inſerebat, & poſt triturationem factam in ſtomacho, è ventre dimittebat.

Inſt. 6°. Non difficilius eſt per motum exponere omnes omninò brutorum operationes, quàm operationes plantæ illius quæ *ſenſitiva* vocatur à Phyſicis ; atqui operationes omnes plantæ ſenſitivæ poſſunt exponi per motum ; ergo pariter exponentur per motum omnes omninò brutorum operationes. Prob. maj. Quotiès noſtris in hortis manu tangitur planta ſenſitiva, toties indignans reluctari videtur, & quaſi contactu violata ſtringit frondem, uſquè adeò ut, ſi inſtes, contrahat in ſeipſam ramos, & properet capite flexo in terram procumbere : manum deindè ſi retrahas, tum plantam hanc reſurgentem miraberis, omnia rurſùs pandentem folia, atque ore quaſi ſereno revireſcentem ; ergo non difficilius eſt per motum exponere brutorum operationes, quàm operationes plantæ ſenſitivæ.

Reſp. ad 1. *neg. maj. ad* 2. *conc. ant. & neg. æquam & paritatem.* Nullum elucet in planta ſenſitiva cognitionis ſignum ; contrà verò animalia bruta nobis innumera præbent ſigna cognitionis.

Præterea Mecanicæ Principiis conformes ſunt operationes plantæ ſenſitivæ. Hæc enim planta ductus habet miris aptos modis, atque arte magiſtra inſtructos, ut ait author Antilucretii ; unde fit ut humor ſparſus fibris ac frondibus

cogatur revocare gradum appulsu minimo vel pluviæ, vel baculi, vel manûs: hinc planta sensitiva subsidere cernitur & quasi simulare fugam. Contrà verò operationes brutorum animalium non semel diffórmes sunt Mecanicæ Principiis & legibus generalibus morûs, ut superiùs demonstravimus; ergo nulla potest institui paritas plantam sensitivam inter & animalia bruta.

At inquies. Quidnam est igitur sentiendum de brutis animalibus?

Resp. Brutis inest vera & propriedicta anima, quæ neque materialis est, neque spiritualis, sed quæ medium aliquod tenet materiam inter & spiritum. Quod ut probetur, sit.

PROPOSITIO II.

Brutis inest vera & propriè dicta anima.

Probatur 1°. Non unum experimentum indicat brutis inesse Principium cognoscitivum & sensitivum, ergo brutis inest vera & propriè dicta anima. Prob. ant. enumeratione sequenti.

1°. Apes & formicæ annonam sibi statis temporibus comparant.

2°. Castores, instante hyeme, solerter admodùm domos ex ramis arborum extruunt; tabulatis distinguunt ædificium; longa spiracula quò subire possit aer, in parte summa relinquunt &c.

3°. Nullus est canis qui dominum suum non solùm non audiat & sequatur, sed illum etiam ab omni alio non secernat.

4°. Nullum est brutum quod si lutum, spinas aut impedimentum quodcumque repetiat, non deflectat à via rectâ quam priùs insistebat.

5°. Denique bestia nulla est quæ, si percutiatur graviter, dolorem suum non manifestet clamoribus & ejulatibus miserrimis. Quibus omnibus suppositis, sic breviter ratiocinor:

Omnia hæc experimenta Principium cognoscitivum & sensitivum indicant; ergo non unum experimentum

indicat brutis ineſſe Principium cognoſcitivum & ſenſitivum.

Confirmatur. Exemplo non ignobilis illius equi quem, anno 1687, tota Gallia non ſine ſtupore vidit. Artem numerandi ſic edoctus fuerat equus ille, ut, cùm exhibebatur charta luſoria, terram pede toties percuteret, quot punctis charta diſtinguebatur. Nummum aureum ſi oſtenderes, aut aliam monetam, ſtatim quot libræ in nummo aureo, quot aſſes in argentea moneta continerentur, pede indicabat, &c. &c.

Prob. 2°. Si bruta neque cognoſcunt, neque ſentiunt; ſequitur quòd Deus ipſe nos inducit in errorem; impium cquens, ergo & ant. Prob. ſeq. Si bruta neque cognoſcunt, neque ſentiunt, Deus nobis ipſe dedit ſenſus per ſe falſitatis manifeſtativos, neque medium ullum ſufficiens addidit quo poſſimus diſcernere verum à falſo; ergo &c. Prob. ant. Senſus ritè applicati nobis conſtanter & uniformiter manifeſtant animalia bruta ſentire & cognoſcere; ergo ſi bruta neque cognoſcunt, neque ſentiunt, Deus nobis ipſe dedit ſenſus per ſe falſitatis manifeſtativos, neque medium ullum ſufficiens addidit quo poſſimus diſcernere verum à falſo.

Solvuntur argumenta oppoſita.

Obj. 1°. Si brutis ineſſet vera & propriè dicta anima, ſequeretur quòd bruta forent obnoxia dolori, falſum cquens, ergo & ant. Prob. min. Si bruta forent obnoxia dolori, vel bruta peccaſſent, vel ſaltem forent peccati capacia; falſum cquens, ergo & ant. Prob. ſeq. Ideò concludimus hominem peccaſſe, quia ſcilicet homo obnoxius eſt dolori, ergo à pari concludere debemus bruta peccaſſe, ſi bruta ſunt dolori obnoxia.

Reſp. ad 1. conc. ſeq. & neg. min. ad 2. neg. ſeq. ad 3. diſt. ant. Ideò concludimus hominem peccaſſe, quia ſcilicet homo obnoxius eſt dolori, hoc eſt, peccatum eſt unica cauſa cur homo ſit dolori obnoxius, neg. ant. non eſt unica cauſa, conc. ant. & neg. cquam. Homo ex natura ſua, & ex eo præcisè quòd conſtat ex anima & corpore,

debet esse dolori obnoxius. Deus equidem hominem innocentem ab omni omninò dolore liberasset; sed id actum fuisset in præmium & mercedem ejus obedientiæ, non verò vi naturæ humanæ. Ut autem aliquid ex argumento proposito concludatur legitimè, priùs esset probandum hominem, præcisè prout hominem, nulli esse ex natura sua obnoxium dolori.

Inst. Repugnat divinæ bonitati ut entia, incapacia peccati, creentur ut sint, non tàm hominum dominationi, quàm tyrannidi subdita; ergo si bruta forent obnoxia dolori, deberent esse capacia peccati.

Resp. nego totum id quod in antecedente supponitur. Non creantur animalia bruta ut sint hominum tyrannidi subdita, sed ut hominum utilitati serviant. Dolores autem quibus sunt obnoxia bruta, non modò non repugnant divinæ bonitati, sed & Deum providentissimum denotant; admonentur enim, illorum ope, de illis quæ sibi possunt esse noxia. Item si bruta sensationibus doloriferis & delectabilibus destituerentur, homo non posset illis uti, & consequenter inverteretur ordo naturæ à Deo sapienter institutus.

Obj. 2°. Si brutis inesset vera & propriè dicta anima, per creationem fieret hæc anima; falsum cquens, nam anima brutorum fit dependenter à corpore sine quo non potest naturaliter existere; ergo & ant.

Resp. ad 1. conc. seq. & neg. min. ad 2 dist. ant. Anima brutorum fit dependenter à corpore, hoc est, anima brutorum educitur à corpore, quemadmodùm mixta educuntur ex elementis præsuppositis, neg. ant.; hoc est, anima brutorum creatur ad constituendum cum corpore belluino compositum aliquod substantiale, conc. ant. & neg. cquam. Hæc per se patent.

Inst. Ex dictis sequitur animam brutorum esse formam informantem corpus belluinum; falsum cquens, nam id competit soli animæ rationali, ergo & ant.

Resp. Non video cur anima brutorum non appellatur in scholis forma informans corpus belluinum. Informat equidem corpus humanum anima rationalis; sed quid inde?

Nonne ſunt duobus illis entibus alia prædicata communia? Attamen quoniam ſum ego rixarum impatiens, appelletur anima brutorum *forma ſuſtentans*, & ſit ſola anima hominis *forma informans*, id per me licet.

PROPOSITIO III.

Anima brutorum non eſt materialis.

Prob. Si anima brutorum eſſet materialis, ſequeretur quòd anima brutorum foret ſubſtantia materialis; falſum ęquens, ergo & ant. Prob. min. Si anima brutorum eſſet ſubſtantia materialis, ſequeretur 1°. quòd anima brutorum foret pura materia, & conſequenter bruta forent pura automata; falſum ex prima propoſitione ęquens, ergo & ant.; ſequeretur 2°. quòd pura materia ſentiret & cognoſceret, falſum ex appendice 1 ęquens, ergo & ant.

Solvuntur objectiones.

Obj. 1°. Anima brutorum eſt diviſibilis, ergo materialis eſt. Prob. ant. Factâ diviſione ſerpentis aut lacerti, media pars animæ manet in corpore, & media pars in cauda; nam poſt diviſionem corpus & cauda moventur; ergo anima brutorum eſt diviſibilis.

Reſp. ad 1. *&* 2. *neg. ant. ad* 3. *diſt. ant.* Poſt diviſionem cauda movetur propter animam ipſi conjunctam, neg. ant. propter ſpiritus vitales intrà caudam aliquandiu decurrentes, conc. ant. & neg. ęquam. Quod autem accidit caudæ ſerpentis à reliquo corpore ſeparatæ, hoc idem accidit brachio hominis amputato; quis tamen dixerit poſt amputationem animatum eſſe brachium hujuſmodi.

Inſt. Factâ per medium corpus diviſione quorumdam vermium, vivit pars utraque, ſicque ex unico verme fit duplex ſeorſim vivens; ergo diviſibilis eſt anima brutorum.

Reſp. cum D. de Reaumur, nego totum id quod in antecedente ſupponitur. In hujuſmodi vermibus non datur unicum animal, ſed exiſtunt animalia multa; tot enim exiſtunt vermes particulares, quot dantur annuli, ac proindè tot dantur animæ, quot dantur annuli.

Obj. 2. Si anima brutorum est indivisibilis, sequitur quòd immortalis sit ex natura sua; falsum cquens, ergo & ant. Prob. seq. Ideò concludimus animam hominis immortalem esse ex natura sua, quia scilicet est indivisibilis; ergo si &c.

Resp. ad 1. *neg. seq. ad* 2. *dist. ant.* Ideò concludimus animam hominis immortalem esse ex natura sua, quia præcisè est indivisibilis, neg. ant. quia est indivisibilis, & quia separata à corpore humano non erit ens inutile in rerum natura, conc. ant. & neg. cquam. In brutis pereunte corpore, perire debet & ipsorum anima, ratione scilicet inutilitatis. Et verò illud ens est inutile in rerum natura, quod nullas omninò potest operationes elicere; atqui talis est anima brutorum separata à corpore; nam anima brutorum nullas habet operationes nisi dependenter ab organis corporis; ergo anima brutorum, separata à corpore, inutilis est in rerum natura, ac proindè, ratione inutilitatis, Deus illam annihilabit.

PROPOSITIO IV.

Anima brutorum non est spiritualis.

Prob. Si anima brutorum foret spiritualis, sequeretur quòd anima brutorum foret substantia spiritualis; falsum cquens, ergo & ant. Prob. min. Si anima brutorum foret substantia spiritualis, anima brutorum foret libera, capax meriti & demeriti, immortalis ex natura sua &c; sunt enim hæc omnia totidem proprietates essentiales spiritûs; falsum cquens, ergo & ant.

Solvuntur argumenta opposita.

Obj. 1°. Brutis inest Principium cognoscitivum, ergo brutis inest anima spiritualis. Prob. cquam. Ideò concludimus animam hominis spiritualem esse, quia scilicet habet hæc anima potentiam cognoscendi; ergo si brutis inest principium cognoscitivum, brutis inesse debet anima spiritualis.

Resp. ad 1. *conc. ant. & neg. cquam. Ad* 2. *dist. ant.* Ideò concludimus animam hominis spiritualem esse, quia

ſcilicet habet hæc anima potentiam cognoſcendi præcisè, neg. ant. potentiam cognoſcendi objecta merè ſpiritualia, & ſuprà ſuos actus reflectendi, conc. ant. & neg. cquam. Anima brutorum directè tantummodò cognoſcit objecta materialia. Præterea anima brutorum non eſt libera, & libera eſt anima hominis. Porrò libertas fons eſt & origo præcipuæ demonſtrationis quâ innititur ſpiritualitas animæ rationalis.

Hinc ſequitur cognitionem in brutis non eſſe ſui cognitionem.

Sequitur etiam brutorum animam neque ſeipſam cognoſcere, neque ſcire ſe exiſtere; hæc enim omnia ſupponunt potentiam capacem reflectendi, ſeu ſuper actus ſuos redeundi.

Inſt. 1°. Caſtores reflectunt eo ſaltem tempore quo ſua conſtruunt ædificia; ergo quædam bruta animam ſpiritualem habent. Prob. ant. talia ædificia non poſſent à nobis ſine reflexione conſtrui; ergo *à fortiori* ſine reflexione non conſtruuntur à caſtoribus.

Reſp. ad 1. *neg. ant. ad* 2. *conc. ant. & neg. cquam & peritatem.* Homines ædificia ſua liberè conſtruunt; contrà verò caſtores ædificant ex quadam naturæ neceſſitate. Hinc explicatur facilè cur juniores caſtores ſint æquè in ædificando periti, ac ſeniores.

Iis adde quod ſi caſtores in ædificando reflecterent, aliquid perfectionis ſenſim ſine ſenſu ſuis ædificiis addidiſſent. Hoc autem falſum eſſe experientiâ conſtat; quo enim modo caſtores, temporibus Adami, ædificabant, eodem prorsùs modo ætatis hujus-ce caſtores ædificant.

Quod autem dictum eſt de caſtoribus, idem dictum puta de apibus rempublicam ſuam regentibus, de formicis annonam ſtatis temporibus comparantibus, de avibus conficientibus nidos, prolem educantibus &c.

Inſt. 2°. Caſtigetur canis eò quòd Domino ſuo imperanti non obedierit; deindè oſtendatur ei baculus à Domino idem omninò mandatum iterante, canis ſtatim obedier. Quo ſuppoſito, ſic ratiocinor: ideo canis obedit, quia reflectit ſuper modum quo fuit exceptus à Domino ſuo; ergo quædam bruta reflectunt.

Resp. admisso supposito, neg. ant. Non ideò canis obedit, quia reflectit super modum quo fuit exceptus à Domino suo, sed quia memoriam habet saltem corpoream. Hæc omnia paucis expono.

Canis castigari non potest, quin in parte cinerea ipsius cerebri imprimantur aliquot vestigia. Viso baculo, vel auditâ minaci voce Domini sui, spiritus vitales intrà hæc vestigia decurrunt, atque canem determinant ad exequenda Domini sui mandata. Fiunt hæc omnia, ut vides, non equidem sine cognitione, sed sine reflexione.

Inst. 3°. Quædam bruta recordantur cognitionum quas priùs habuerunt; ergo quædam bruta redeunt in suas cognitiones; ergo quædam bruta reflectunt.

Resp. dist. ant. Quædam bruta recordantur cognitionum quas prius habuerunt, & sciunt hæc bruta se recordari, neg. ant. & id nesciunt, conc. ant. & neg. utramque cquam. Cùm recordamur cognitionis quam priùs eliquimus, tùm compertum nobis est cognitionem similem nostram in mentem priùs venisse. Id autem de brutis dici non potest; bruta enim cognitiones suas non cognoscunt.

Obj. 2°. Bruta sunt libera, ergo spiritualis est anima brutorum. Prob. ant. Bruta agunt propter finem, & ex innumeris mediis assumunt illa quæ meliùs & faciliùs ad finem perducunt; canis, *v. g.*, assumit viam breviorem & commodiorem ad finem suum assequendum; ergo bruta sunt libera.

Resp. ad 1. neg. ant. ad 2. dist. ant. Bruta agunt propter finem formaliter ut finem, & assumunt media formaliter ut media, & ut formaliter ad talem finem conducentia, neg. ant. agunt propter finem & assumunt media materialiter tantùm & ex quadam naturæ necessitate, conc. ant. & neg. cquam. Bruta non cognoscunt proportionem, ordinem, relationem finis ad media, & mediorum ad finem, ac proindè non possunt agere propter finem formaliter ut finem, neque assumere media formaliter ut media ad talem finem conducentia.

Inst. 1°. Bruta assumunt media prout jucunda, ergo &

possunt assumere media prout media ad talem finem conducentia.

Resp. dist. ant. Bruta assumunt media prout jucunda, hoc est, quod in mediis est jucundum & delectabile, id determinat brutum ex quadam naturæ necessitate ut cæco quodam impetu feratur in objecta, conc. ant. hoc est brutum ità comparat medium jucundum cum medio minus jucundo, ut liberè eligat unum præ alio, neg. ant. & c̃quam.

Inst. 2°. Si bruta finem suum assequuntur ex quadam naturæ necessitate, sequitur quòd bruta multò perfectiùs agant, quàm homines; nam ex duabus causis illa perfectiùs agit quæ semper finem suum assequitur, intereadùm altera finem suum non semper obtinet; atqui bruta non perfectiùs agunt, quàm homines; ergo bruta finem suum non assequuntur ex quadam naturæ necessitate.

Resp. ad 1. neg. seq. ad 2. dist. ant. Ex duabus causis illa perfectiùs agit quàm altera, quæ semper finem suum assequitur, si finis utriusque sit æqualis, conc. ant. si finis utriusque sit valdè inæqualis, neg. ant. & c̃quam. Finis hominis multò nobilior est fine brutorum, & finis brutorum multo nobilior fine entium inanimatorum.

Obj. 3°. Verisimile est animam brutorum nihil aliud esse quàm malos dæmones; nam verisimile est malos dæmones, in pœnam superbiæ suæ, inclusos fuisse in corpore brutorum; sed mali dæmones sunt spiritus; ergo verisimile est animam brutorum esse spiritum.

Resp. ad 1. neg. maj. ad 2. neg. ant. Fusè explicatur hæc opinio falsa in libro quodam, non amænè minùs & festivè, quàm elegantèr elaborato qui sic inscribitur (Amusement philosophique sur le langage des Bêtes). Ex ipsomet libri titulo infertur evidenter Authorem hunc ingeniosum, recreationis tantùm causâ, asseruisse animam brutorum nihil aliud esse quàm malos dæmones qui, in superbiæ suæ pœnam, fuerunt in corpore brutorum inclusi. Imò quidem, invito & inscio authore, prodiit in lucem opinio hujusmodi quæ in multis peccat, sed in eo præcipuè quòd adducan-

tur in ejus confirmationem non pauci Scripturæ ſacræ textus quorum explicatio, minùs æquo ſeria, difformis eſt evidenter cum genuino librorum ſacrorum ſenſu.

PROPOSITIO V.

Anima brutorum medium quoddam tenet materiam inter & ſpiritum.

Explicatur propoſitio. Hæ ſunt præcipuæ proprietates animæ brutorum.

1°. Finis ejus intrinſecus & proximus eſt conſtituere cum corpore belluino compoſitum aliquod ſubſtantiale, & operationes elicere dependenter ab organis corporis; finis autem ejus extrinſecus eſt hominum utilitati ſervire.

2°. Anima belluina unitur phyſicè cum corpore brutorum

3°. Anima brutorum eſt indiviſibilis, ac proindè tota reperitur in toto centro ovali, & tota in qualibet parte centri ovalis corporis belluini; id appellatur in ſcholis *occupare centrum ovale definitivè.*

4°. Anima brutorum poteſt per miraculum exiſtere ſeparata à ſuo ſubjecto, nempè à corpore belluino.

5°. Anima brutorum cognoſcit objecta materialia cognitione directâ, non verò reflexâ; hinc neque judicat, neque diſcurrit.

6°. Anima brutorum non eſt libera libertate indifferentiæ; hinc neque vult, neque non vult niſi volitione & nolitione valdè imperfecta.

7°. Anima brutorum non eſt immortalis ex natura ſua; ſed pereunte corpore, debet & ipſa perire, ratione ſcilicet inutilitatis.

8°. Anima brutorum neque eſt materia, neque ſpiritus; ſed eſt ſubſtantia inferior ſpiritui, & materiæ ſuperior.

Prob. propoſitio. Bruta non ſunt pura automata, ſed habent veram animam; *ex propoſitionibus* 1, 2. Item Brutis non ineſt anima materialis aut ſpiritualis, ex propoſitionibus 3, 4. Ergo brutis ineſt anima quæ medium quoddam teneat materiam inter & ſpiritum.

Solvuntur argumenta oppoſita.

Obj. 1°. Nullum datur medium materiam inter & ſpiritum, nam hæc duo entia ſeſe invicem excludunt; ergo anima brutorum vel eſt materia vel ſpiritus.

Reſp. ad 1. *neg. ant. ad* 2. *diſt. ant.* Materia & ſpiritus ſeſe invicem excludunt, tanquam duo entia contradictoria, neg. ant. tanquam duo entia contraria, conc. ant. & neg. æquam. Inter duo entia contraria dari poſſunt, juxta dialecticæ leges, non unum, ſed ſexcenta entia intermedia; ergo materiam inter & ſpiritum dari poſſunt entia innumera quæ neque ſint materia, neque ſpiritus.

Inſt. Concipi non poteſt quænam ſit natura entis hujus intermedii, ergo non exiſtit ens illud.

Reſp. diſt. ant. Concipi non poteſt quænam ſit natura entis hujus intermedii, hoc eſt, non poteſt ens hujuſmodi repræſentari ſub ſpecie ſenſibili, conc. ant. hoc eſt, enumerari non poſſunt multæ dotes quæ competant enti huic intermedio, neg. ant. & æquam. Si valeret argumentum hujuſmodi, nulla in nobis anima exiſteret.

Obj. 2°. Actus animæ brutorum medium non tenent inter actus materiales & actus ſpirituales, ergo neque anima brutorum medium tenet materiam inter & ſpiritum. Prob. ant. cognitiones animæ brutorum ſunt materiales, nam pendent ab organis corporeis; ergo actus animæ brutorum medium non tenent inter actus materiales & actus ſpirituales.

Reſp. ad 1. *&* 2. *neg. ant. ad* 3. *diſt. ant.* Cognitiones animæ brutorum pendent ab organis corporeis, ità ut organa corporea ſint principium concurrens ad productionem cognitionum quæ eliciuntur à brutis, neg. ant. ita ut organa corporea ſint tantùm conditio ſine qua cognitiones non elicerentur à brutis, conc. ant. & neg. æquam. Tàm cognitiones brutorum medium tenent inter actus materiales & actus ſpirituales, quàm anima brutorum medium tenet materiam inter & ſpiritum.

FINIS.

TABLE

Des Matieres contenues dans cet Ouvrage.

LIVRE Ier. *Introduction.* page 1.
LETTRE PREMIERE. *Néceſſité d'un commentaire pour les articles* 20, 29 & 34. 3
Réponſe contenant les éclairciſſements néceſſaires pour l'intelligence des articles 20, 29 & 34. 4
LETTRE SECONDE. *Remarques ſur les trois premiers Corollaires du théorême de l'article* 44. *Néceſſité d'un commentaire pour le Corollaire* 4 *du même Théorême.* 6
Réponſe contenant des éclairciſſements pour le Corollaire 4 *de l'article* 44, & *pour les articles* 52, 53, 58, 60 & 62. 8
LETTRE TROISIEME *contenant des remarques ſur les articles* 68, 79, 84 & 96. 11
Réponſe contenant des remarques ſur les articles 96, 97, 98, 99, 113, 116. 14
LETTRE QUATRIEME. *Néceſſité d'un commentaire pour les articles* 126 & 145. 20
Réponſe contenant le commentaire de l'article 126 & *une remarque ſur l'article* 145. *ibid.*
LETTRE CINQUIEME. *Réflexions ſur la plupart des articles qui regardent la rencontre mutuelle des corps.* 22
Réponſe. Réflexions ſur les articles 182, 188, 189, 194, 198, 199 & 200. 39
LETTRE SIXIEME *contenant des réflexions ſur les articles* 212, 213, 217 & 220. 44
Réponſe relative à la lettre précédente. 45
LETTRE SEPTIEME. *Néceſſité d'un commentaire pour les articles* 237 & 238. *Examen des articles* 240, 241, 242 & 243. *ibid.*

Réponſe contenant le commentaire des articles 237 & 238. 47
LETTRE HUITIEME. *Réflexions ſur les 10 premiers articles de la Mécanique de M. l'Abbé de la Caille qui regardent les poulies mobile & immobile.* 50
Réponſe contenant le commentaire de l'article 253. 51
LETTRE NEUVIEME. *Remarques ſur les 7 articles qui regardent le Tour.* 52
Réponſe. Remarques pratiques ſur le Tour & ſur le plan incliné. Commentaire de preſque tous les articles qui regardent cette derniere machine. 54
LETTRE DIXIEME. *Néceſſité d'un commentaire pour l'article 273.* 57
Réponſe. Principes néceſſaires pour l'intelligence de la chaînette. Penſées du P. Reynau ſur cette courbe. Méthode pour la rectifier. 58
LETTRE ONZIEME. *Inſuffiſance de ce qu'a écrit M. l'Abbé de la Caille ſur le Coin.* 64
Réponſe contenant le ſupplément à ce qu'a écrit l'Abbé de la Caille ſur le Coin & ſur la force de percuſſion. *ibid.*
LETTRE DOUZIEME. *Néceſſité d'une figure pour bien comprendre le mécaniſme des rouages.* 66
Réponſe contenant le commentaire des articles 285, 286, 287, 288, 290, 298. *ibid.*
LETTRE TREIZIEME. *Commentaire de l'article 302. Néceſſité d'un commentaire pour l'intelligence de la Vis ſans fin.* 69
Réponſe contenant l'explication de la Vis ſans fin, & remarques ſur les articles 306, 307 & 309. 76
LETTRE QUATORZIEME. *Remarques ſur les poulies mouflées.* 72
Réponſe contenant le commentaire des articles 320, 322, 323, 324, 326, 327, 328 & 330. 73
LETTRE QUINZIEME. *Remarques ſur les articles 349, 350, 354, 355, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368 & 369.* 87
Réponſe contenant des remarques ſur les articles 371, 372, & le commentaire des articles 373, 374 & 375. 96

LETTRE SEIZIEME. *Remarques ſur les articles* 376, 377, 378, 384, 385, 389, 392, 394, 395, 398, 399, 401, 402 & 403. 102
Réponſe ſur les ſcholies dont il eſt parlé dans la lettre précédente. 109
LETTRE DIX-SEPTIEME. *Remarques ſur les articles* 416, 420, 428, 429, 431, 433, 440, 442 & 443. 110
Réponſe contenant une remarque analogue au ſupplément qui ſuit ce commentaire. 114
LETTRE DIX-HUITIEME. *Remarques ſur les articles* 451, 453 & 459. 115
Réponſe contenant le commentaire des articles 464, 465, 468, 470, 471, 475, 476, 483, 484 & 487. 117
LETTRE DIX-NEUVIEME. *Remarques ſur les articles* 494, 496, 498, 500, 502, 503, 504 & 505. 125
Réponſe contenant des remarques ſur les articles 506, 510, 512 & 514. 128
LETTRE VINGTIEME. *Remarques ſur les articles* 519, 521, 522, 523, 524 & 525. 131
Réponſe contenant des remarques ſur les articles 532 & 539. 133

SUPPLÉMENT

Au Traité de Mécanique de M. l'Abbé de la Caille.

LIVRE SECOND. *Introduction.* 135
Mecanica. 138
CAPUT I. *De Notionibus & quæſtionibus ad Mecanicam præambulis.* *ibid.*
QUÆSTIO I. *De inertia corporum.* 140
PROPOSITIO I. *Datur inertia in omnibus omninò corporibus.* *ibid.*

PROPOSITIO II. *Eſt inertia moli proportionalis.* 141
Solvuntur argumenta oppoſita. *ibid.*
QUÆSTIO II. *De menſura virium.* 145
PROPOSITIO UNICA. *Menſura virium omnium motricium eſt productum molis per ſimplicem corporis velocitatem.* *ibid.*
Solvuntur argumenta oppoſita. 147
CAPUT II. *De Regulis motûs in genere ſpectati.* 151
Prima lex motûs. *ibid.*
Secunda lex motûs. *ibid.*
Tertia lex motûs. 152
CAPUT III. *De legibus motûs centripeti.* 153
ARTICULUS I. *De legibus attractionis.* 154
PROPOSITIO I. *Si datur attractio Newtoniana, hæc attractio non eſt ſimilis qualitatibus occultis Peripateticorum.* 156
PROPOSITIO II. *Datur inter varia orbis hujus univerſi corpora attractio Newtoniana.* 157
PROPOSITIO III. *Attractio Newtoniana fit in ratione directa molium.* 158
PROPOSITIO IV. *Attractio Newtoniana eſt in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum à centro virium.* 159
PROPOSITIO V. *Syſtema attractionem Newtonianam admittens eſt ſyſtema mecanicum.* 160
Solvuntur argumenta oppoſita. *ibid.*
COROLLARIUM I. *Duo corpora æqualia in ſuperficie duarum ſphærarum æqualis denſitatis & diverſæ magnitudinis conſtituta, attrahuntur in ratione directa radiorum ſphærarum earumdem.* 170
COROLLARIUM II. *Attractio nulla eſt quæ fit in ratione inverſa cuborum diſtantiarum.* 171
COROLLARIUM III. *Non dantur in natura leges generales repulſionis.* 173
ARTICULUS II. *De præcipuo legum attractionis effectu.* 175
QUÆSTIO UNICA. *De gravitate corporum.* *ibid.*
PROPOSITIO UNICA. *Per attractionem Newtonianam*

rectè & facilè explicantur omnia phænomena gravitatem corporum ſublunarium ſpectantia. 176
Solvuntur argumenta oppoſita. *ibid.*
COROLLARIUM I. *Corpora gravia liberè decidentia motum ſuum accelerant juxta proportionem arithmeticam numerorum imparium* 1, 3, 5, *&c.* 180
COROLLARIUM II. *Spatia percurſa à corpore gravi liberè decidente ſunt in ratione directa quadratorum temporum ſumptorum ab initio motûs.* 183
COROLLARIUM III. *Velocitates acquiſitæ deſcenſu gravium ſe habent ut tempora.* 184
COROLLARIUM IV. *Velocitates acquiſitæ deſcenſu gravium ſe habent ut radices quadratæ ſpatiorum percurſorum.* *ibidem*
COROLLARIUM V. *Tempora ſunt inter ſe ut radices quadratorum ſpatiorum.* *ibidem*
COROLLARIUM VI. *De natura & præcipuis proprietatibus centri gravitatis.* 185
COROLLARIUM VII. *De natura centri gravitationis variorum corporum ſe invicem attrahentium.* 188
PROBLEMA I. *Invenire centrum gravitationis ſolis & corporum omnium circa ſolem girantium.* *ibidem*
PROBLEMA II. *Determinare molem circa quam corpus aliquod circulariter girat.* 190
PROBLEMA III. *Invenire diſcrimen quod reperitur inter molem ſolis & molem terræ.* 191
ANNOTATIO I. *in qua determinatur diſcrimen quod reperitur inter molem ſolis & molem Saturni.* 193
ANNOTATIO II *in qua determinatur diſcrimen quod reperitur inter molem ſolis & molem jovis.* *ibidem*
ANNOTATIO III *in qua determinatur diſcrimen quod reperitur inter molem ſolis & molem veneris.* *ibidem*
ANNOTATIO IV *in qua determinatur diſcrimen quod reperitur inter molem terræ & moles Saturni, Jovis & Veneris.* *ibidem*
CAPUT IV. *De motu compoſito per lineam rectam.* *ibidem*

LEX UNICA. *Corpus, viribus conjunctis, diagonalem quadrilateri eodem tempore percurret, quo, separatis viribus, latera ejusdem quadrilateri percurrisset.* 194
Solvuntur argumenta opposita. 195
CAPUT V. *De motu curvo in genere spectato.* 198
CAPUT VI. *De motu centrifugo.* 200
ASSERTIO UNICA. *In omni corpore lineam quamcumque curvam percurrente datur aliqua vis centrifuga.* *ibidem*
CAPUT VII. *De motu circulari.* 202
ASSERTIO I. *Vis centripeta corporis cujuscumque circulum describentis æqualis est quadrato velocitatis corporis circulariter girantis, diviso per diametrum circuli descripti.* *ibidem*
ASSERTIO II. *In corpore circulum describente velocitas circulationis æqualis est velocitati quam acquisivisset idem corpus liberè cadens, atque motu uniformiter accelerato percurrens mediam partem radii circuli descripti.* 205
ASSERTIO III. *In corpore circulum describente directio vis projectionis & directio vis centripetæ semper efformant angulum rectum.* 208
ASSERTIO IV. *In corpore circulum describente vis centripeta semper est æqualis vi centrifugæ.* *ibidem*
ASSERTIO V. *Duo corpora æqualia quæ moventur in circulis æqualibus cum inæquali velocitate, suas habent vires centrifugas in ratione directa quadratorum velocitatum.* 210
ASSERTIO VI. *Duo corpora æqualia quæ moventur in circulis inæqualibus cum æquali velocitate, suas habent vires centrifugas in ratione inversa radiorum circulorum quos illa corpora describunt.* 211
ASSERTIO VII. *Duo corpora æqualia quæ moventur in circulis concentricis, suam habent velocitatem in ratione inversa radicum quadratarum radiorum circulorum quos illa corpora describunt.* 212
CAPUT VIII. *De motu elliptico.* 213
LEMMA I. *Linea curva non circularis describi potest per varios motus, quorum unus sit paracentricus, alii verò*

circulares. 215
LEMMA II. *Velocitates circulares ſunt in ratione inverſa radiorum vectorum lineæ curvæ non circularis.* *ibidem*
PROPOSITIO I. *Corpus quodcumque deſcribens ellipſim, donatur minori vi projectionis, quàm ſi deſcripſiſſet circulum cujus radius æqualis fuiſſet diſtantiæ aphelii ellipſis ejuſdem à foco.* 216
PROPOSITIO II. *Vis centripeta corporis cujuſcumque circumferentiam ellipticam deſcribentis, eſt in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum à centro virium.* 219
PROPOSITIO III. *In corpore ellipſim deſcribente vis centrifuga proveniens ex variis motibus circularibus unà cum motu paracentrico inſervientibus ad ellipſim efformandam, eſt in ratione inverſa cuborum diſtantiarum à centro virium.* 220
Solvuntur argumenta oppoſita. 221
CAPUT IX. *De regulis motûs in conflictu corporum non elaſticorum.* 225
REGULA I. *ibidem*
REGULA II. 227
CAPUT X. *De Regulis motûs in conflictu corporum elaſticorum.* 229
REGULA I. *ibidem*
REGULA II. 230
CAPUT XI. *De Machinis.* 235
Principium generale Mecanices. 236
De forficibus & forcipibus. 237
De remis nautricis. *ibidem*
De libra. 238
De ſtatera. 239
De axe in peritrochio & Grue. 240
De rotis dentatis. *ibidem*
De trochlea immobili. 241
De trochlea mobili. 242
De cuneo. 243
De cochlea ſimplici. *ibidem*
De cochlea compoſita. 244

De plano inclinato. 245
CAPUT XII. *De reſiſtentiis.* 246
REGULA I. *Corpus ſolidum non poteſt fluidum aliquod ingredi, in eoque moveri, quin reſiſtentiam aliquam patiatur, atque aliquid de ſuo motu amittat.* *ibidem*
REGULA II. *Reſiſtentia primi generis eſt in ratione directa cohæſionis & tenacitatis partium fluidi.* *ibidem*
REGULA III. *Reſiſtentia primi generis, cæteris omnibus æqualibus, eſt in ratione directa ſuperficierum corporum quæ inventur in quocumque fluido.* 247
REGULA IV. *Reſiſtentia primi generis, cæteris omnibus æqualibus eſt in ratione directa temporis adhibiti in fluido quocumque trajiciendo.* 248
REGULA V. *Reſiſtentia ſecundi generis proportionalis eſt denſitati fluidi.* 249
REGULA VI. *Reſiſtentia ſecundi generis, cæteris omnibus æqualibus, proportionalis eſt ſuperficiei corporis fluidum quodcumque trajicientis.* *ibidem*
REGULA VII. *Auctâ velocitate corporis ſolidi fluidum quodcumque trajicientis, augetur & reſiſtentia ſecundi generis quam corpus ſolidum experitur ex parte fluidi.* *ibidem*
L'ANTI-MATÉRIALISME. *Introduction.* 251
APPENDIX I. *De Anti-Materialiſmo.* 252
CAPUT I. *Utrum natura cogitationis poſſit exponi per motum.* 253
PROPOSITIO UNICA. *Impoſſibile eſt exponere per motum naturam cogitationis.* *ibidem*
Solvuntur argumenta oppoſita. 256
ARTICULUS II. *Utrum demonſtrari poſſit materiam eſſe cogitandi incapacem, etiam de potentia dei abſoluta.* 259
PROPOSITIO PRIOR. *Demonſtrari poteſt* ab intrinſeco *materiam eſſe cogitandi incapacem.* 261
DEMONSTRATIO Ia. *ibid.*
DEMONSTRATIO II. 262
DEMONSTRATIO III. *ibid.*

Solvuntur argumenta oppoſita. 263
LES BÊTES ANTI-MACHINES. 271
APPENDIX II. *De Beſtiis.* 272
PROPOSITIO I. *Animalia bruta non ſunt puræ machinæ, meraque automata.* 273
DEMONSTRATIO I. *ibid.*
DEMONSTRATIO II. *ibid.*
Solvuntur argumenta oppoſita. 274
PROPOSITIO II. *Brutis ineſt vera & propriedicta anima.* 277
PROBATIO I. *ibid.*
PROBATIO II. 278
Solvuntur argumenta oppoſita. *ibid.*
PROPOSITIO III. *Anima brutorum non eſt materialis.* 280
PROBATIO. *ibid.*
Solvuntur argumenta oppoſita. *ibid.*
PROPOSITIO IV. *Anima brutorum non eſt ſpiritualis.* 281
PROBATIO. *ibid.*
Solvuntur argumenta oppoſita. *ibid.*
PROPOSITIO V. *Anima brutorum medium quoddam tenet materiam inter & ſpiritum.* 285
Explicatur & probatur propoſitio. *ibid.*
Solvuntur argumenta oppoſita. 286

On trouve encore dans cet Ouvrage, immédiatement après la Préface, un Traité ſur le calcul intégral.

Fin de la Table.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amés & féaux Conſeillers les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé le Sieur BERNARD DE VALABREGUE, NOTRE INTERPRETE, Nous a fait expoſer qu'il deſiroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage qui a pour titre : *Le Guide des Jeunes Mathématiciens, ſur les Leçons de Mr. l'Abbé de la Caille*, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de neuf années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes : Faiſons défenſes à tous Imprimeurs, Libraires & autres perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun Lieu de notre obéiſſance ; comme auſſi de faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucun Extrait, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenants, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Préſentes ſeront enrégiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée & attachée pour modele ſous le contre-ſcel des Préſentes ; que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Réglements de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725. qu'avant de l'expoſer en vente, le Manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le Sieur de la MOIGNON ; & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle dudit Sieur de la MOIGNON ; & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Vice-Chancelier &

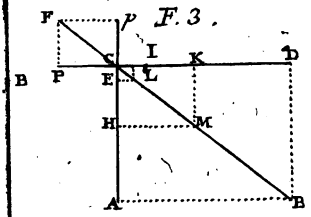
Garde des Sceaux de France le Sieur de MAUPEOU, le tout à peine de nullité des Préſentes ; du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant, & ſes ayant cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenue pour duement ſignifiée ; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers-Sécretaires, foi ſoit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis, & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion ; & nonobſtant clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires. CAR tel eſt Notre plaiſir. DONNÉ à Paris le onzieme jour du mois de Septembre, l'an de Grace mille ſept cent ſoixante cinq, & de notre Regne le cinquante & unieme. Par le Roi en ſon Conſeil. *Signé* LE BEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XVI. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, Num. 661, *fol.* 375. *conformément au Réglement de* 1723. *qui fait défenſes, art.* 41 *à toutes perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, debiter, faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs, ou autrement, & à la charge de fournir à la ſuſdite Chambre neuf Exemplaires preſcrits par l'article* 108 *du même Réglement. A Paris ce* 4 *Octobre* 1765. Signé LE BRETON *Syndic.*

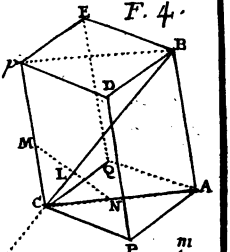
L'Approbation du Cenſeur Royal eſt à la tête du Volume contenant le Commentaire des Leçons de Mathématiques de M. l'Abbé de la Caille.

PRINTED IN FRANCE

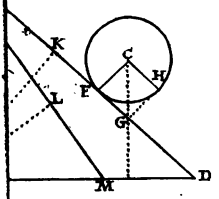
F. 3.



F. 4.

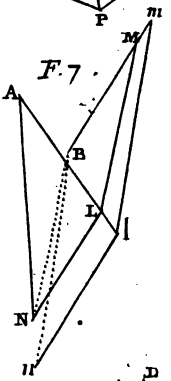


F. 6.

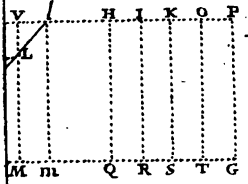


F

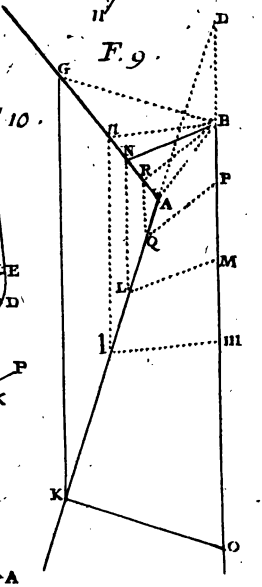
F. 7.



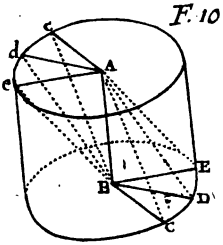
F. 8.

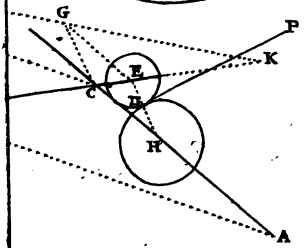


F. 9.

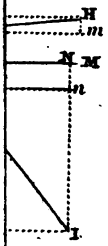


F. 10.

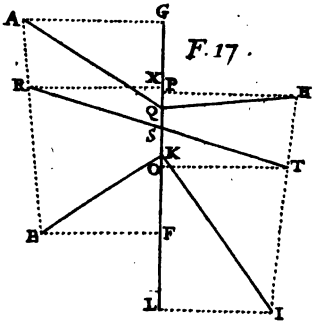




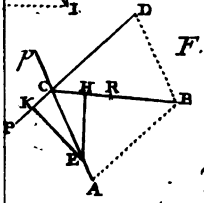
16.



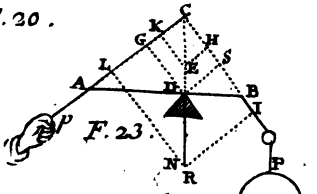
F. 17.

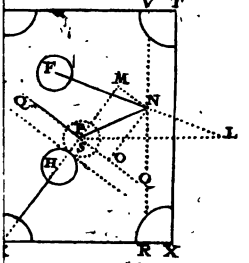


F. 20.

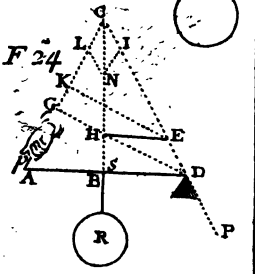


F. 23.

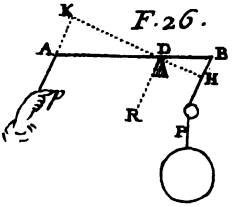




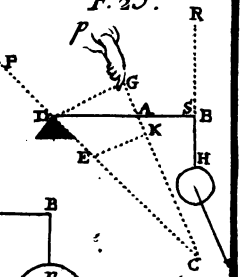
F. 24.



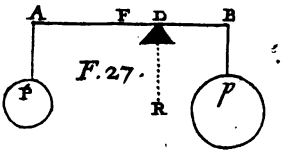
F. 26.

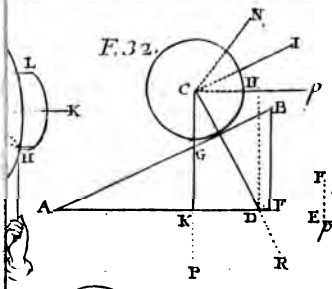


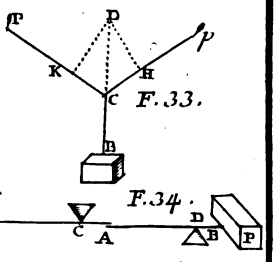
F. 25.

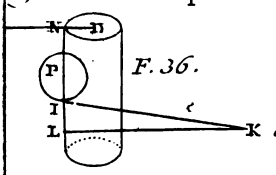


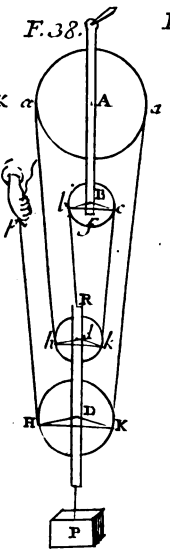
F. 27.

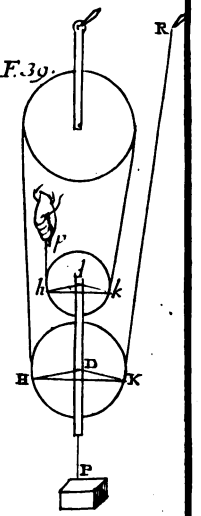


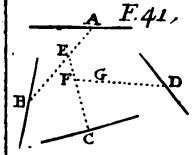

F. 32.
N
I
L
K
C
H
P
B
G
A
D
F
P
R

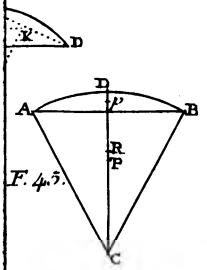

F. 33.
F
D
P
K
H
C
B
F. 34.
F
E
p
C
A
D
B
P

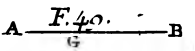

F. 36.
N
H
P
I
L
c
K

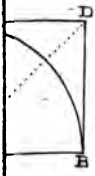

F. 38.
a
A
a
B
c
R
H
D
K
P

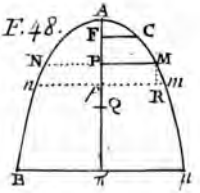

F. 39.
R
P
h
k
H
D
K
P

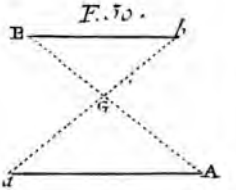

A
F. 41.
E
F
G
D
B
C


K
D
D
A
p
B
R
F
C
F. 45.

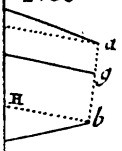

A
F. 40.
G
B


D
B

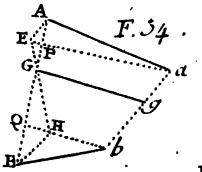

F. 48.
A
F
C
N
P
M
n
m
R
Q
B
π
H


F. 50.
B
b
G
a
A

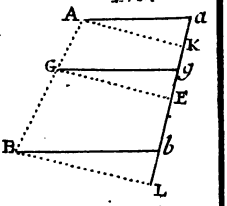
F. 53.

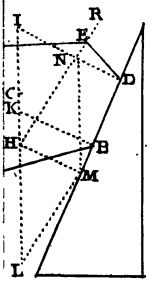


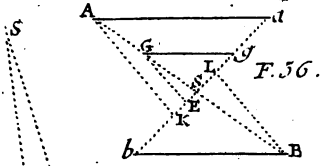
F. 54.



F. 55.

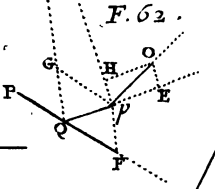


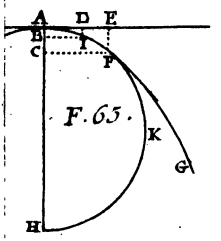




F. 56.

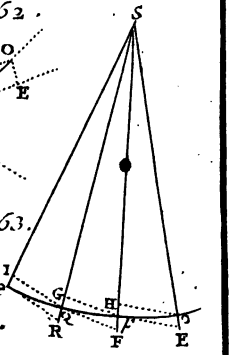
F. 62.

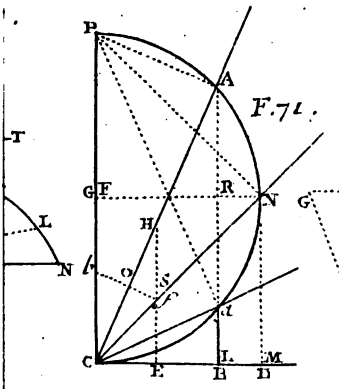




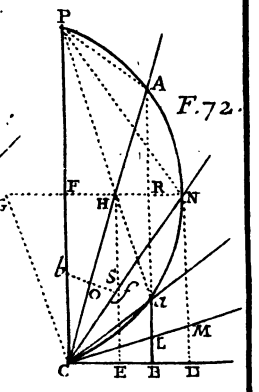
F. 65.

F. 63.

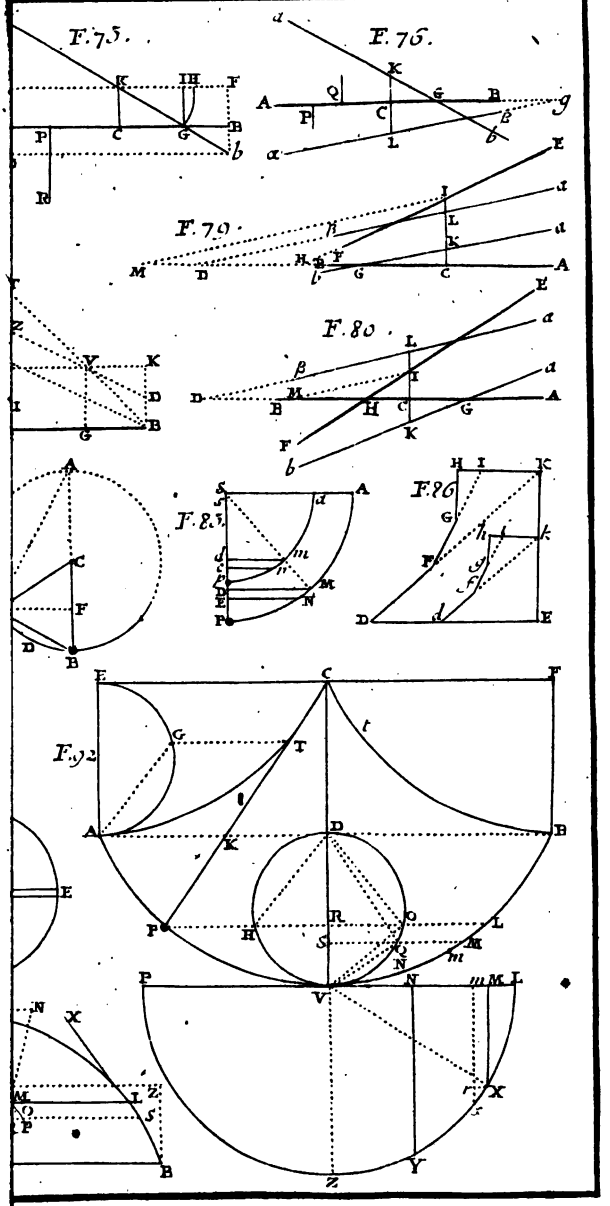


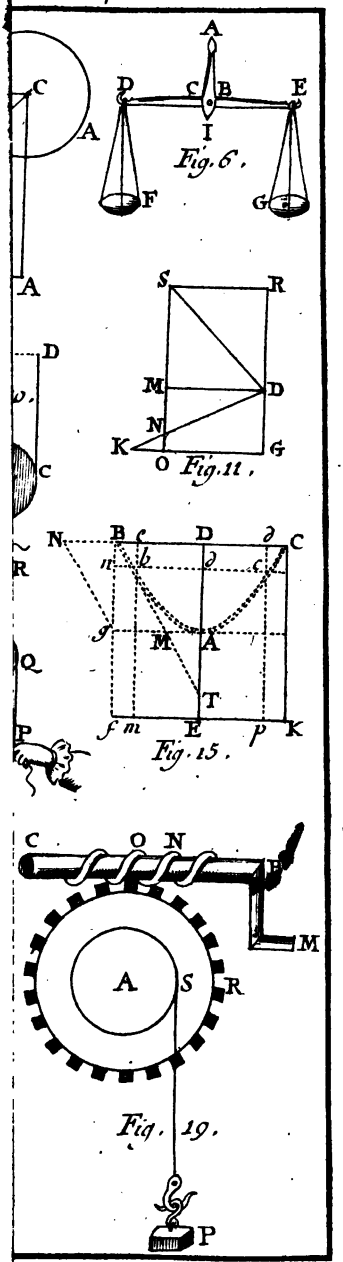


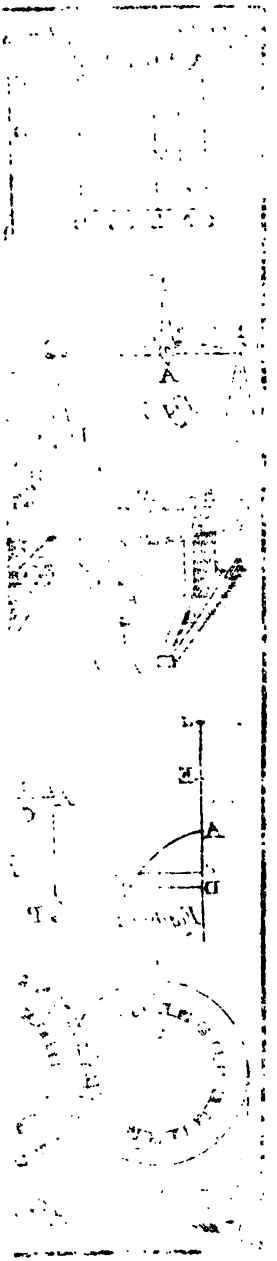
F. 71.

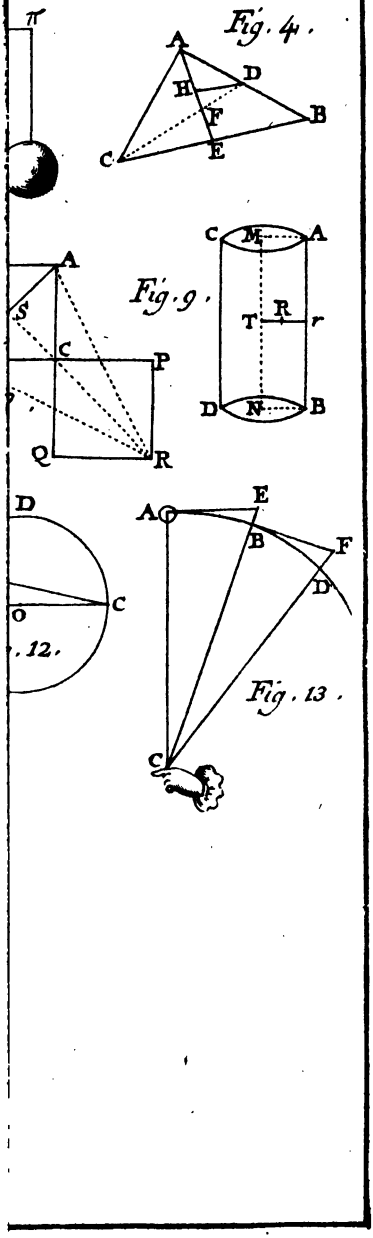


F. 72.


F. 75.
F. 76.
F. 79.
F. 80.
F. 81.
F. 86.
F. 92.


A
C
D
C
B
E
I
A
F
G
Fig. 6.
A
S
R
D
M
D
N
K
O
G
Fig. 11.
D
C
N
B
c
D
∂
C
R
M
A
Q
T
P
f m
E
p
K
Fig. 15.
C
O
N
M
A
S
R
Fig. 19.
P


A
A
D


π
A
D
H
F
B
C
E
Fig. 4.
A
S
C
P
Q
R
Fig. 9.
C
M
A
R
T
r
D
N
B
D
C
O
. 12.
A
E
B
F
D
C
Fig. 13.